

Informativo técnico-científico ITC-06 / ATP

Determinação dos módulos elásticos de compósitos empregando a Técnica de Excitação por Impulso

ATCP Engenharia Física
Divisão Sonelastic
www.sonelastic.com

Autores:

Dr. Lucas Barcelos Otani (Otani, L.B.)¹

Dr. Antônio Henrique Alves Pereira (Pereira, A.H.A.)¹

Revisão:

Dr. José Daniel Diniz Melo (Melo, J.D.D.)²

Dr. Sandro Campos Amico (Amico, S.C.)³

⁽¹⁾ ATCP Engenharia Física

⁽²⁾ Universidade Federal do Rio Grande do Norte

⁽³⁾ Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Versão 1.5
08/2022

ÍNDICE

1. Objetivo.....	1
2. Introdução	1
3. Determinação dos módulos elásticos de compósitos com a Técnica de Excitação por Impulso	3
3.1. Fundamentos da técnica.....	3
3.2. Modos de vibração.....	4
3.3. Os módulos elásticos dos compósitos.....	6
3.3.1. Módulo de Young.....	7
3.3.2. Módulo de cisalhamento.....	8
3.3.3. Coeficiente de Poisson.....	8
4. Simetria do material e os módulos elásticos obtidos empregando o Sonelastic®	9
5. Considerações finais.....	10
6. Referências bibliográficas	11
Anexo A – Teoria da elasticidade aplicada aos materiais compósitos.....	12
1. Introdução.....	12
2. Matriz rigidez para diferentes tipos de materiais.....	14
3. Análise micromecânica.....	16
4. Análise macromecânica.....	20
Anexo B - Coeficiente de Poisson para compósitos empregando a TEI.....	31
1. Material isotrópico.....	31
2. Material transversalmente isotrópico.....	32
3. Material ortotrópico.....	33
Anexo C - Perguntas frequentes (FAQ)	34

1. Objetivo

O objetivo deste informativo técnico-científico é apresentar a teoria e a metodologia para a determinação não-destrutiva dos módulos elásticos de compósitos pela Técnica de Excitação por Impulso. Este informativo apresenta uma revisão da literatura e os avanços realizados pela ATCP Engenharia Física na aplicação desta técnica, já normatizada para materiais isotrópicos [1], para a caracterização de materiais compósitos.

2. Introdução

A definição de materiais compósitos varia entre diferentes autores dependendo das ponderações e considerações realizadas. De acordo com Chawla [2], para que um material seja classificado como compósito, este deve satisfazer algumas condições. Primeiramente, devem ser materiais manufaturados, ou seja, projetados e produzidos pelo homem; devem consistir em uma combinação adequada de fases distintas física e/ou quimicamente entre si, possuindo uma interface bem definida entre elas; por fim, possuir características que não são atingidas por seus componentes isolados.

Os materiais compósitos intrínsecos são constituídos por pelo menos dois componentes: a matriz, que pode ser cerâmica, metálica ou polimérica, e o reforço, que pode estar na forma de fibras ou partículas. Já os compósitos estruturais podem estar na forma de laminados ou painéis sanduíche (Figura 1).

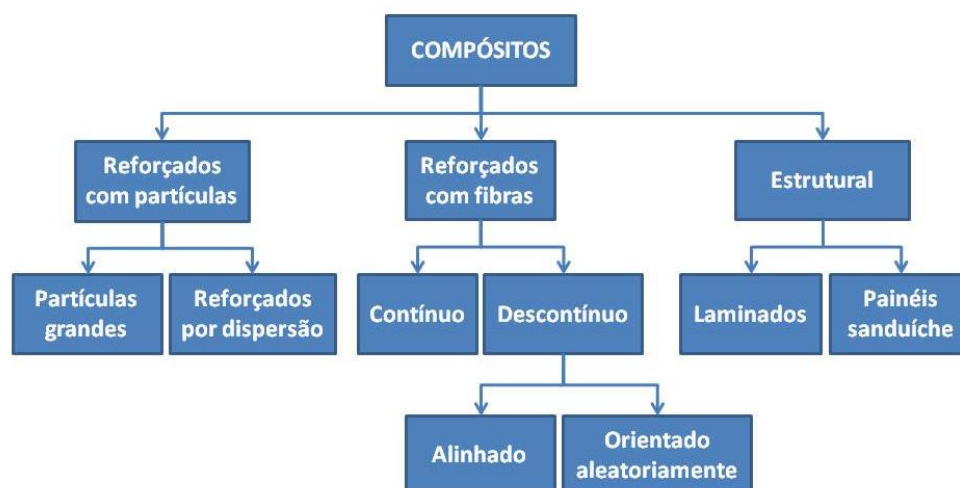


Figura 1 - Classificação dos materiais compósitos [3].

O advento dos compósitos com um maior conteúdo tecnológico iniciou na década de 60 pela demanda por materiais que apresentassem alta resistência aliada a uma baixa

densidade. As aplicações envolviam principalmente o setor de construção civil, indústria aeroespacial e de energia [2,4]. Atualmente, os compósitos possuem aplicações em diversos segmentos da indústria, sendo empregados na produção de artigos simples, passando por carros [5] a vasos de pressão de alto desempenho (Figura 2).



Figura 2 – Vasos de pressão para gás natural fabricados pela 3M com materiais compósitos.

A determinação dos módulos elásticos de compósitos é crucial para o desenvolvimento, a seleção de materiais e o controle de qualidade, assim como para permitir análises por elementos finitos e cálculos estruturais confiáveis. Uma das técnicas não-destrutivas que vem crescendo para a avaliação dos módulos elásticos é a Técnica de Excitação por Impulso, foco deste trabalho. A Fig. 3 apresenta corpos de prova de CFRP e UHMWPE preparados para a determinação dos módulos de elasticidade pela Técnica de Excitação por Impulso.



Figura 3 - Corpos de provas de uma blindagem balística de polietileno de ultra alto peso molecular (UHMWPE) e de um painel aeronáutico monolítico de plástico reforçado com fibra de carbono (CFRP). Estes corpos de prova estão preparados para a medição não-destrutiva dos módulos elásticos empregando a Técnica de Excitação por Impulso e os Sistemas Sonelastic® [6].

3. Determinação dos módulos elásticos de compósitos com a Técnica de Excitação por Impulso

3.1. Fundamentos da técnica

A Técnica de Excitação por Impulso (ASTM E1876 [1]) consiste essencialmente na determinação dos módulos elásticos de um material a partir das frequências naturais de vibração de um ou mais corpos de prova de geometria regular (barra, cilindro, disco ou anel). Essas frequências são excitadas com um impacto mecânico de curta duração, seguido da captação da resposta acústica por um sensor acústico. Um tratamento matemático é aplicado no sinal para a obtenção do espectro de frequências. A partir disso, são calculados os módulos elásticos dinâmicos considerando a geometria, a massa, as dimensões do corpo de prova e as frequências obtidas com o processamento da resposta acústica.

Para a excitação do modo de vibração desejado, é necessário impor condições de contorno específicas. Na Fig. 4 é apresentado um exemplo de suporte de corpo de prova, com pulsador manual e captador acústico posicionados para medir o módulo de Young pelo modo de vibração flexional.

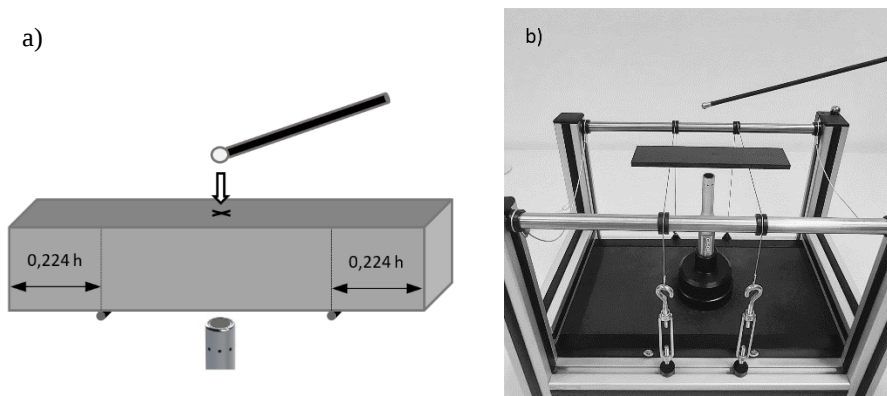


Figura 4 – a) Disposição básica para a caracterização de uma barra no modo de vibração flexional pela Técnica de Excitação por Impulso [7]; b) Suporte ajustável para barras e cilindros SA-BC desenvolvido e fabricado pela ATCP Engenharia Física.

3.2. Modos de vibração

Um corpo de prova pode vibrar em diferentes modos e para cada um desses há uma frequência fundamental característica. Na Fig. 5 são apresentados os principais modos fundamentais de vibração [8].

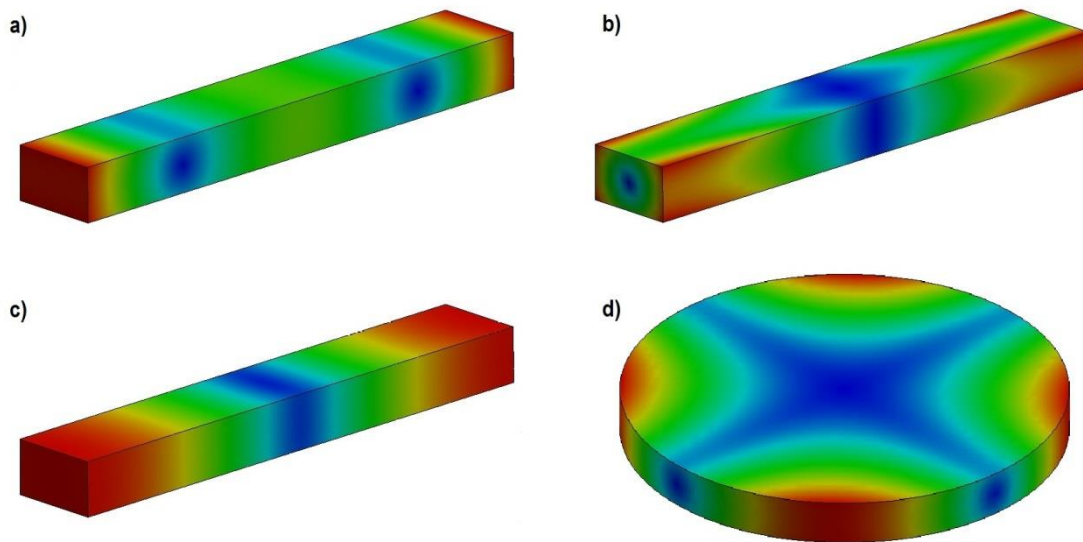


Figura 5 - Modos fundamentais de vibração: a) flexional, b) torcional, c) longitudinal e d) planar. As regiões em azul representam os pontos em que a amplitude de vibração é mínima, enquanto as regiões em vermelho representam as regiões em que a amplitude de vibração é máxima.

O que determina qual modo de vibração será excitado são as condições de contorno impostas ao corpo de prova. A frequência fundamental destes modos é determinada em função da geometria, da massa, das dimensões e dos módulos elásticos.

Nas Figuras 6.a-c são representadas as condições de contorno ótimas para os principais modos de vibração de uma barra [1], e na Figura 6.d, de um disco. A partir das frequências de ressonância do corpo de prova (determinadas pelo modo de vibração), e empregando as equações descritas pela norma ASTM E1876 [1], são calculados os módulos elásticos dinâmicos correspondentes.

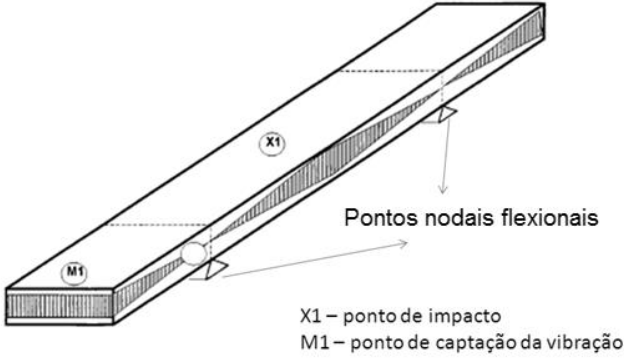
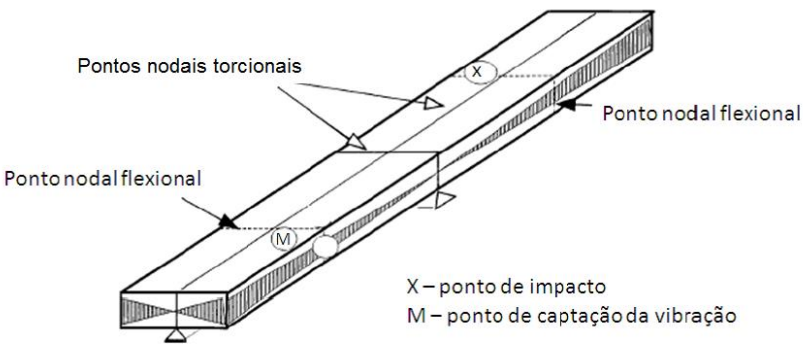
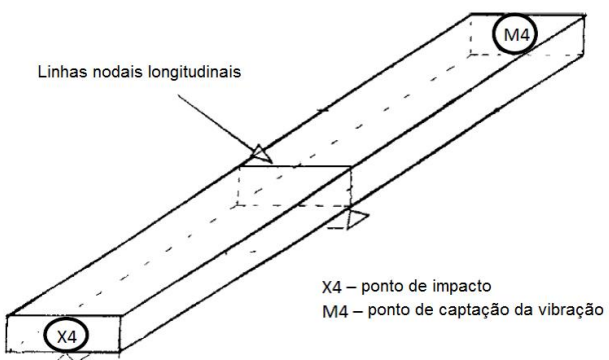
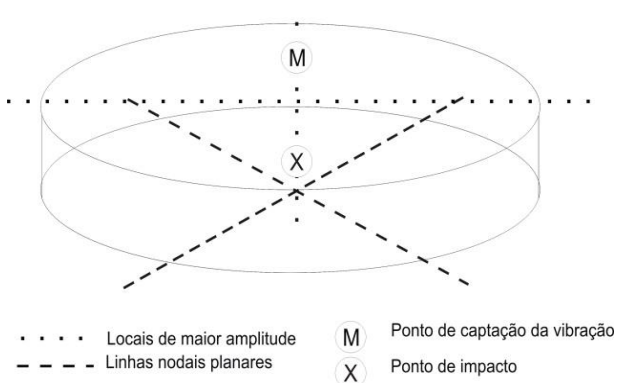
a) Modo de vibração flexional	 Pontos nodais flexionais X1 – ponto de impacto M1 – ponto de captação da vibração
b) Modo de vibração torcional	 Pontos nodais torcionais Ponto nodal flexional X – ponto de impacto M – ponto de captação da vibração
c) Modo de vibração longitudinal	 Linhas nodais longitudinais X4 – ponto de impacto M4 – ponto de captação da vibração
d) Modo de vibração planar	 Locais de maior amplitude --- Linhas nodais planares M Ponto de captação da vibração X Ponto de impacto

Figura 6 - Condições de contorno para a excitação do modo de vibração fundamental (a) flexional, (b) torcional, (c) longitudinal e (d) planar.

3.3. Os módulos elásticos dos compósitos

A maioria dos materiais compósitos apresenta algum grau de anisotropia, ou seja, apresenta propriedades que são dependentes da direção de sollicitação. Quando caracterizados empregando a Técnica de Excitação por Impulso, é importante conhecer e reportar a simetria do material e a orientação do corpo de prova.

O Apêndice A descreve a teoria da elasticidade aplicada aos materiais compósitos a partir de uma visão micro e macromecânica de forma generalizada, sendo que são descritos os três principais tipos de materiais com relação à simetria presente e como devem ser tratadas as constantes elásticas em cada caso.

A Figura 7 ilustra uma estrutura genérica não-isotrópica, tal que, para a determinação dos módulos elásticos principais (E_1, E_2, E_3) são necessários três corpos de prova com orientações nas direções 1, 2 e 3.

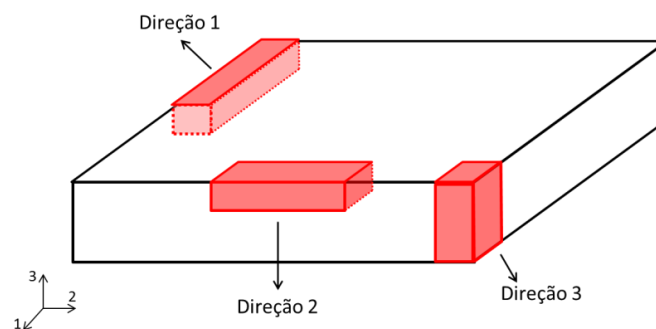


Figura 7 - Ilustração de um material genérico e de como se obter os corpos de prova nas três direções principais.

A Tabela 1 indica os módulos elásticos que podem ser determinados empregando a Técnica de Excitação por Impulso e as orientações relativas a um corpo de prova ortotrópico (Figura 7). Nesta tabela, os termos utilizados [9] são:

E_1 – Módulo de Young na direção 1;

E_2 – Módulo de Young na direção 2;

E_3 – Módulo de Young na direção 3;

G_{ef} – Módulo de cisalhamento medido pelo equipamento Sonelastic®. Este módulo corresponde a uma combinação dos módulos G_{ij} indicados entre parênteses [14];

G_{13} – Módulo de cisalhamento associado a deformações no plano 13;

G_{23} – Módulo de cisalhamento associado a deformações no plano 23;

G_{12} – Módulo de cisalhamento associado a deformações no plano 12.

Tabela 1 – Indicação dos módulos elásticos determináveis pela Técnica de Excitação por Impulso de acordo com a orientação do corpo de prova e em função dos modos de vibração.

		Modo de Vibração		
		Longitudinal	Flexional	Torcional
Orientação do corpo de prova	1	E_1^{long}	E_1^{flex}	$G_{ef}(G_{12}, G_{13})$
	2	E_2^{long}	E_2^{flex}	$G_{ef}(G_{12}, G_{23})$
	3	E_3^{long}	E_3^{flex}	$G_{ef}(G_{13}, G_{23})$

3.3.1. Módulo de Young

- **Modo de vibração longitudinal**

Quando o corpo de prova for solicitado na direção longitudinal (ver condições de contorno na Figura 6.c), o módulo elástico medido é na direção do comprimento do corpo de prova. Ou seja, a orientação da amostra é que determinará qual módulo está sendo determinado (E_1 , E_2 , E_3 ou uma composição destes no caso de amostras cuja direção paralela ao seu comprimento não coincida a uma das orientações principais), como apresentado na Tabela 1.

- **Modo de vibração flexional**

Quando um material é flexionado, ocorrem solicitações simultâneas de tração e compressão, como ilustra a Fig. 8 [10]. Para materiais homogêneos e isotrópicos, o módulo elástico obtido em um ensaio de flexão coincide com o módulo elástico medido na direção longitudinal. Portanto, o módulo elástico dinâmico obtido por meio do modo de vibração flexional é o mesmo que o obtido por meio do modo de vibração longitudinal [10]. Porém, sabe-se que, em flexão, a superfície do material é a região em que estão presentes os maiores valores de tensão normal. Por essa razão, caso a rigidez do corpo de prova seja diferente na superfície em comparação ao centro (por exemplo, se houver um gradiente de rigidez ao longo da espessura) ou caso a amostra apresente pequenos defeitos como poros, trincas e microtrincas em sua superfície, haverá uma discrepância nos valores obtidos pelo modo de vibração flexional e pelo modo longitudinal. Há diversos trabalhos focados na avaliação de madeiras que relatam diferenças de valores de acordo com o modo de vibração [8,11-13].

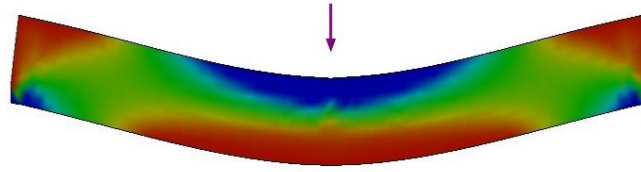


Figura 8 - Região em tração (vermelho) e em compressão (azul) durante um ensaio de flexão.

3.3.2. Módulo de cisalhamento

- **Modo de vibração torcional**

Quando um corpo de prova é solicitado em torção, dois modos de cisalhamento agem simultaneamente no caso de materiais transversalmente isotrópicos e ortotrópicos. Se a torção ocorrer como descrito na Figura 6b, os módulos de cisalhamento atuantes serão os associados aos planos que estão sendo cisalhados (os quatro planos laterais do corpo de prova). Portanto, o módulo de cisalhamento calculado a partir da frequência de vibração torcional fundamental corresponderá a um módulo efetivo. Assim, o resultado obtido pelo [Sonelastic®](http://www.sonelastic.com) será uma combinação dos módulos de cisalhamento atuantes (a Tabela 1 indica os módulos de cisalhamento que compõem o valor efetivo para cada orientação de corpo de prova) [14].

3.3.3. Coeficiente de Poisson

A determinação do coeficiente de Poisson pela Técnica de Excitação por Impulso é indireta, sendo obtido a partir da correlação entre o módulo de Young e o módulo de cisalhamento do material, ou pelas equações recíprocas dos coeficientes de Poisson. Estas equações provêm da Teoria da Elasticidade e estão diretamente relacionadas às matrizes de rigidez referentes às simetrias, conforme apresentado a seguir:

- Material isotrópico:

$$\nu = \frac{E}{2G} - 1$$

- Material transversalmente isotrópico:

$$\nu_{23} = \frac{E_2}{2G_{23}} - 1$$

- Material ortotrópico:

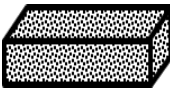
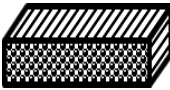
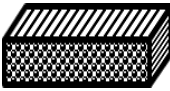
$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}$$

Onde: E é o módulo de Young, G o módulo de cisalhamento e ν o coeficiente de Poisson de um material isotrópico. O apêndice B apresenta a dedução destas equações, bem como explicações detalhadas sobre a medição do coeficiente de Poisson utilizando a TEI.

4. Simetria do material e os módulos elásticos obtidos empregando o Sonelastic®

Como mencionado, os compósitos podem apresentar diferentes simetrias com relação às propriedades mecânicas. Sendo assim, faz-se necessário saber qual é esta simetria, quais são os módulos elásticos que se deseja determinar e quais são as orientações existentes. A Tabela 2 apresenta um breve resumo e módulos mensuráveis empregando a Técnica de Excitação por Impulso com o [Sonelastic®](http://www.sonelastic.com).

Tabela 2 – Módulos elásticos de acordo com a simetria e orientação dos corpos de prova necessários, assim como os módulos elásticos possíveis de serem determinados através da Técnica de Excitação por Impulso (TEI).

Tipo de material com relação a simetria	Módulos elásticos	Orientação dos corpos de prova		Módulos elásticos mensuráveis pela TEI utilizando o Sonelastic®
Isotrópico	E, G, ν	-		E, G, ν
Transversalmente isotrópico	$E_1, E_2 = E_3,$ $G_{12} = G_{13}, G_{23},$ $\nu_{12} = \nu_{13}, \nu_{23}$	1		$E_1, G_{12} = G_{13}$
		2 ou 3		$E_2, G_{ef} (G_{12}, G_{23})$
Ortotrópico	$E_1, E_2, E_3,$ $G_{12}, G_{13}, G_{23},$ $\nu_{12}, \nu_{21},$ $\nu_{13}, \nu_{31},$ ν_{23}, ν_{32}	1		$E_1, G_{ef} (G_{12}, G_{13})$
		2		$E_2, G_{ef} (G_{12}, G_{23})$
		3		$E_3, G_{ef} (G_{13}, G_{23})$

Para a determinação dos módulos elásticos com a Técnica de Excitação por Impulso é necessário preparar diferentes corpos de prova nas orientações adequadas à simetria do material. Também é possível a caracterização de amostras que contenham fibras em ângulos intermediários (entre 0° e 90°).

5. Considerações finais

Os compósitos, materiais formados pela combinação de dois ou mais materiais de naturezas distintas, podem ter seus módulos de elasticidade determinados de forma não-destrutiva pela Técnica de Excitação por Impulso, empregando-se as soluções [Sonelastic®](http://www.sonelastic.com). Para tanto, é necessário conhecer a simetria do compósito a fim de se preparar corpos de prova de acordo com as direções do material e de se aplicar as condições de contorno adequadas.

6. Referências bibliográficas

- [1] ASTM International. *Standard Test Method for Dynamic Young's Modulus, Shear Modulus, and Poisson's Ratio by Impulse Excitation of Vibration*. ASTM E1876-21, 2021.
- [2] CHAWLA, K. K., *Composite Materials: Science and Engineering*. 3 ed. New York, Springer, 2012.
- [3] Classificação dos materiais compósitos quanto ao tipo de reforço utilizado. Disponível em: <<http://concretocomposito.blogspot.com.br/2012/06/v-behaviorurldefaultvmlo.html>>. Acessado em 6 de Julho de 2022.
- [4] DANIEL, I. M., ISHAI, O. *Engineering Mechanics of Composite Materials*. New York, Oxford University Press, 1994, 395 p.
- [5] Vaso de pressão para gás natural fabricado pela 3M. Disponível em: <<https://www.compositesworld.com/articles/the-markets-pressure-vessels-2012>>. Acessado em 29 de Junho de 2022.
- [6] Compósitos: Balanço e perspectivas. Disponível em: <<http://www.plastico.com.br/plastico/economia/compositos-balanco-e-perspectivas/>>. Acessado em 21 de Novembro de 2013.
- [7] Esquema de posicionamento e caracterização de acordo com a norma ASTM E1876. Disponível em: <<https://www.sonelastic.com/pt/fundamentos/bases/modulos-elasticos.html>> Acessado em: 06 de Julho de 2022.
- [8] HEYLIGER, P., UGANDER, P., LEDBETTER, H. Anisotropic Elastic Constants: Measurement by Impact Resonance. *Journal of Materials in Civil Engineering*, pp. 356-363, set/out 2001.
- [9] Adaptado de WANGAARD, F.F. *The Mechanical Properties of Wood*. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1950.
- [10] KAW, A.K. *Mechanics of composite materials*. 2 ed. Boca Raton, Taylor & Francis Group, 2006, 457 p.
- [11] ROCHA, J.S., PAULA, E.V.C.M. de, SIQUEIRA, M.L. Flexão Estática em amostras pequenas livres de defeitos. *Acta Amazonica*, Manaus, p. 147-162. 1988.
- [12] CHO, C.L., Comparison of Three Methods for Determining Young's Modulus of Wood. *Taiwan Journal for Science*, pp. 297-306, Maio/2007.
- [13] BUCUR, V., *Acoustics of Wood*. 2ª ed. Germany, Springer, 2006. p. 393.
- [14] BODIG, J., JAYNE, B. A. *Mechanics of wood and wood composites*. Malabar (EUA), Krieger Publishing Company, 1993.
- [15] GIBSON, R. F. *Principles of composite material mechanics*. USA, 1994, 425 p.
- [16] CALLISTER Jr., W.D. *Materials Science and Engineering*. 7ª ed. New York: John Wiley & Sons, Inc, 2007.
- [17] Curva Tensão-Deformação. Disponível em: <http://www.ctb.com.pt/?page_id=1471>. Acessado em: 08 de Julho de 2014.
- [18] NYE, J.F. *Physical Properties of Crystals: their representation by tensors and matrices*. Oxford: At the Clarendon Press. 1957.
- [19] TSAI, S. W. *Theory of Composites Design*. Stanford: Stanford University, 2008, 230 p.

Anexo A – Teoria da elasticidade aplicada aos materiais compósitos

1. Introdução

A partir do ensaio de tração de um material isotrópico (um metal recozido, por exemplo), durante o regime elástico é possível correlacionar a tensão e a deformação descrita pela Equação 1 (Lei de Hooke) [16]:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (1)$$

A Figura 9 mostra uma curva típica de um ensaio de tração quase-estático a partir da qual se obtém as principais propriedades mecânicas de um material [16]. O módulo de Young, E , é o coeficiente angular do início da curva quando o corpo de prova está no regime elástico.

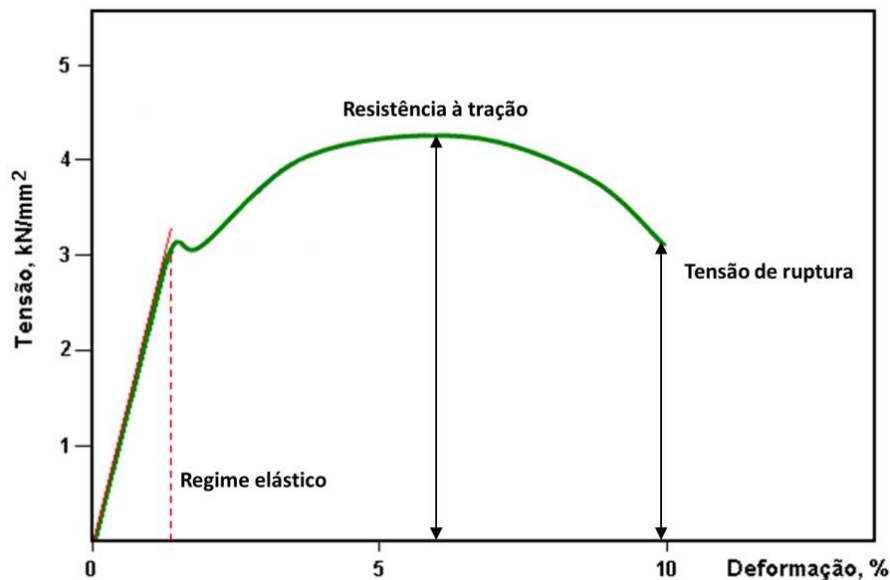


Figura 9 - Curva tensão-deformação de um aço de alta resistência [17].

É usualmente aceitável assumir que os compósitos possuem comportamento elástico linear, porém na maioria dos casos não é possível considerar que estes materiais sejam isotrópicos [2]. Por essa razão, devem ser incorporados à Equação 1 índices referentes à direção, sendo as coordenadas cartesianas as mais comuns. A Figura 10 apresenta um volume infinitesimal com as possíveis tensões durante um carregamento em um sistema ortogonal 1-2-3.

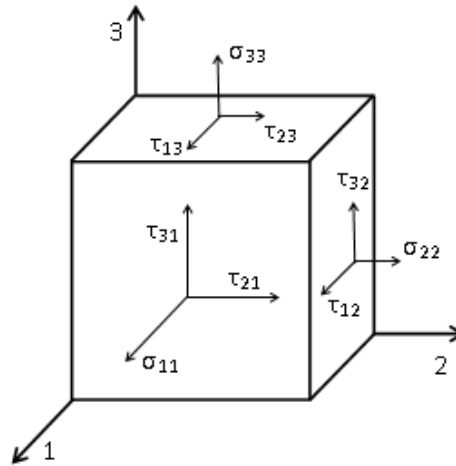


Figura 10 - Tensões em um volume infinitesimal em um sistema ortogonal 1-2-3

Neste volume apresentado, há tensões de tração representadas por σ e tensões de cisalhamento representadas por τ . Assumindo o equilíbrio de forças neste volume, as tensões de cisalhamento direcionadas para a mesma aresta do cubo devem ser iguais (por exemplo, $\tau_{12} = \tau_{21}$). A partir destas ponderações, pode-se descrever o comportamento elástico de um material anisotrópico como sendo:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}, \text{ em que } i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (2)$$

Considerando a tensão e a deformação como matrizes quadradas de ordem 3, pode-se verificar que C_{ijkl} é um tensor de quarta ordem, conhecido como tensor rigidez [2]. A partir de relações de simetria descritas pelas equações em 3, pode-se diminuir o número de constantes elásticas de 81 para 21.

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}, \quad C_{ijkl} = C_{klij} \quad (3)$$

Uma notação reduzida é aplicada aos índices de forma a simplificar a correlação entre a tensão, a deformação e as constantes elásticas, como mostra a Tabela 3.

Tabela 3 - Abreviação da notação de 4 índices para 2 índices [18].

Notação de 4 índices	11	22	33	23	31	12
Notação de 2 índices	1	2	3	4	5	6

A partir destas considerações, tem-se que a matriz rigidez de um material anisotrópico com comportamento linear elástico é simétrica e pode ser descrita como a seguir:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Outra forma de se representar a relação entre tensão e deformação de um material é através da matriz de flexibilidade, apresentada na Equação 5.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Ou seja,

$$[S] = [C]^{-1} \quad (6)$$

Pode-se notar que o modelo representa as propriedades elásticas de um determinado ponto em um material, ou seja, as constantes descritas podem variar de ponto a ponto caso o material não seja homogêneo. A título de simplificação, apesar de serem materiais heterogêneos (i.e. multifásicos), os materiais compósitos são comumente considerados homogêneos.

Para descrever completamente um material quanto às suas propriedades elásticas, é necessário encontrar suas 21 constantes elásticas. Porém, para a maioria dos materiais, este número é reduzido devido à presença de simetrias.

2. Matriz rigidez para diferentes tipos de materiais

2.1. Material ortotrópico

Um material ortotrópico apresenta três planos perpendiculares de simetria, de forma que cada direção corresponde a uma propriedade distinta. Lâminas de compósitos formados por fibras contínuas unidirecionais organizadas em um arranjo retangular ou barras de madeira podem ser classificados como materiais ortotrópicos. Neste caso, pode-se verificar que nove constantes elásticas são suficientes para se caracterizar este material e a matriz rigidez tomará o seguinte aspecto [10]:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (7)$$

2.2. Material transversalmente isotrópico

Materiais transversalmente isotrópicos são materiais ortotrópicos tal que um dos planos de simetria é isotrópico. Como exemplo, pode-se citar lâminas formadas por fibras contínuas unidirecionais organizadas em um arranjo quadrático ou hexagonal. Neste caso, a matriz rigidez será representada por cinco constantes independentes e possui a seguinte forma [10]:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (8)$$

2.3. Material isotrópico

Um material isotrópico é aquele em que a resposta do material será igual independente da orientação de solicitação. Os compósitos que utilizam como reforço materiais particulados (esferas de vidro, por exemplo) ou fibras curtas aleatórias no volume tridimensional podem ser descritos por este modelo. Neste caso, a matriz rigidez apresentará somente duas variáveis independentes e sua representação tomará o seguinte aspecto [10]:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

3. Análise micromecânica

A visão micromecânica aplicada aos compósitos consiste no estudo da incorporação de uma quantidade de fibras (reforço) em uma matriz. A partir de como se dá a interação entre estes componentes é possível prever as constantes elásticas pela combinação entre eles. O foco da análise está em como a fibra interage com a matriz e como se dá a transferência de tensão para o reforço depois de aplicada uma determinada tensão no compósito. As Tabelas 4 e 5 apresentam, respectivamente, algumas propriedades de fibras e de matrizes comumente utilizadas na fabricação de compósitos.

Tabela 4 - Valores de módulo de Young e de densidade para os principais tipos de fibras utilizadas na fabricação de compósitos [15].

Material	Tipo / Nome comercial	Módulo de Young – E (GPa)	Densidade (g/cm³)
Fibra de Vidro	Tipo E	72	2,54
Fibra de Vidro	Tipo S	86	2,49
Fibra de Carbono (PAN)	IM-7 (Hercules)	276	1,77
Fibra de Carbono (PAN)	T-650/42 (Amoco)	290	1,77
Fibra de Carbono (piche)	P-55 (Amoco)	379	1,99
Fibra de aramida	Kevlar® 29 (Dupont)	62	1,44
Fibra de aramida	Kevlar® 49 (Dupont)	131	1,47
Fibra de Boro	D = 0,004" (Textron)	400	2,57

Tabela 5 – Valores de módulo de Young e de densidade para os principais tipos de matrizes poliméricas, metálicas e cerâmicas [2].

Material	Módulo de Young – E (GPa)	Densidade (g/cm³)
Epóxi	2,5 - 4,0	1,2 - 1,3
Poliéster	2,0 - 4,0	1,1 - 1,4
Alumínio	70	2,7
Liga de titânio Ti-6Al-4V	110	4,5
Carbeto de Silício	400 - 440	3,2
Alumina	360 - 400	3,9 - 4,0

3.1. Regra da mistura

A regra da mistura consiste em uma análise simplificada para a previsão do módulo de Young de um compósito formado por fibras contínuas unidirecionais [2]. Aplicando uma carga no sentido longitudinal do compósito (Figura 11a), pode-se considerar que as deformações tanto na matriz quanto no reforço serão iguais ($\varepsilon_c = \varepsilon_f = \varepsilon_m$). Neste caso, a carga aplicada será a soma das cargas na matriz e nas fibras ($P_c = P_f + P_m$). A partir então desta análise, tem-se que:

$$E_{cl} = E_f \Phi_f + E_m \Phi_m \quad (10)$$

Onde: E_{cl} é o módulo de Young longitudinal do compósito; E_f , o módulo de elasticidade da fibra; E_m , o módulo de elasticidade da matriz; Φ_f , a fração volumétrica de fibra no compósito; Φ_m , a fração volumétrica de matriz no compósito ($\Phi_m = 1 - \Phi_f$).

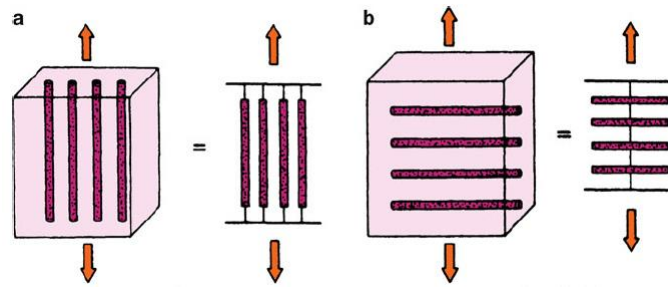


Figura 11 - Representação de um compósito formado por fibras contínuas dispostas unidirecionalmente: (a) aplicação da carga no sentido das fibras ou (b) transversal às fibras [2].

Aplicando uma carga no sentido transversal do compósito (Figura 11b), pode-se considerar que as cargas na matriz e no reforço serão iguais ($P_c = P_f = P_m$). Neste caso, a deformação aplicada no compósito será a soma das deformações na matriz e nas fibras ($\varepsilon_c = \varepsilon_f + \varepsilon_m$). Assim, pode-se chegar a:

$$\frac{1}{E_{ct}} = \frac{\Phi_f}{E_f} + \frac{\Phi_m}{E_m} \quad (11)$$

Onde: E_{ct} é o módulo de Young transversal do compósito.

As Equações 10 e 11 são aplicações da regra da mistura e são aproximações que nem sempre são válidas para os compósitos já que não leva em consideração aspectos como a interface matriz-reforço e a diferença do coeficiente de Poisson entre o reforço e a matriz, por exemplo.

- **Exemplo de aplicação:**

Considerando um compósito formado por 40% de fibras de vidro contínuas do tipo S, dispostas de forma unidirecional em uma matriz de resina epóxi, é possível prever os módulos de Young longitudinal e transversal do material formado. A partir dos valores de módulos listados nas Tabelas 4 e 5, tem-se que:

$$\text{➤ } E_f = 86 \text{ GPa}$$

$$\text{➤ } E_m = 4 \text{ GPa}$$

Módulo de Young longitudinal (Equação 10):

$$E_{cl} = E_f \Phi_f + E_m \Phi_m = E_f \Phi_f + E_m (1 - \Phi_f)$$

$$E_{cl} = 86 * 0,4 + 4 * (1 - 0,4) = 86 * 0,4 + 4 * 0,6$$

$$E_{cl} = 36,8 \text{ GPa}$$

Módulo de Young transversal (Equação 11):

$$\frac{1}{E_{ct}} = \frac{\Phi_f}{E_f} + \frac{\Phi_m}{E_m} = \frac{\Phi_f}{E_f} + \frac{(1 - \Phi_f)}{E_m}$$

$$\frac{1}{E_{ct}} = \frac{0,4}{86} + \frac{0,6}{4} = 0,1546$$

$$E_{ct} = 6,5 \text{ GPa}$$

Portanto, o módulo de elasticidade na direção das fibras será aproximadamente 36,8 GPa e o módulo de elasticidade na direção transversal às fibras será aproximadamente 6,5 GPa.

3.2. Equação de Halpin-Tsai

A equação de Halpin-Tsai é uma forma generalizada de se prever as propriedades elásticas de um compósito a partir das propriedades da matriz e das fibras que o compõem. Foi desenvolvida empiricamente e fornece resultados satisfatórios para compósitos formados por fibras contínuas e descontínuas [2]. A equação possui a seguinte forma:

$$\frac{p}{p_m} = \frac{1 + \xi \eta \Phi_f}{1 - \eta \Phi_f}, \quad \text{tal que,} \quad \eta = \frac{p_f/p_m - 1}{p_f/p_m + \xi} \quad (12)$$

Onde: p é a propriedade do compósito (por exemplo, E_1 , E_2 , G_{12} ou G_{23}); p_m e p_f , as propriedades correspondentes à matriz e à fibra, respectivamente; ξ é um parâmetro do reforço que dependerá das condições de carregamento, da geometria e da distribuição das fibras [2].

- **Exemplo de aplicação:**

Considerando um compósito formado por 40% de fibras de vidro descontínuas do tipo S (razão de aspecto $l/d = 30$) dispostas de forma unidirecional em uma matriz de resina epóxi, é possível prever o módulo de Young do material formado. A partir dos valores de módulos listados nas Tabelas 4 e 5, tem-se que:

$$\triangleright E_f = 86 \text{ GPa}$$

$$\triangleright E_m = 4 \text{ GPa}$$

Módulo de Young (Equação 12):

$$\frac{p}{p_m} = \frac{1 + \xi \eta \Phi_f}{1 - \eta \Phi_f}, \quad \text{tal que} \quad \eta = \frac{p_f/p_m - 1}{p_f/p_m + \xi} \quad \text{e} \quad \xi = 2 \left(\frac{l}{d} \right)$$

esta última consideração é feita para compósitos de fibras descontínuas quando a propriedade a ser avaliada será o módulo de Young na direção das fibras. Portanto,

$$\xi = 2 \left(\frac{l}{d} \right) = 2 * 30 = 60 \quad \text{e} \quad \eta = \frac{E_f/E_m - 1}{E_f/E_m + \xi} = \frac{86/4 - 1}{86/4 + 60} = 0,2515$$

$$\frac{E}{E_m} = \frac{1 + \xi \eta \Phi_f}{1 - \eta \Phi_f} = \frac{1 + 60 * 0,2515 * 0,4}{1 - 0,2515 * 0,4} = 7,82 \text{ GPa}$$

$$E = E_m * 7,82 = 4 * 7,82 = 31,28 \text{ GPa}$$

Portanto, de acordo com a Equação de Halpin-Tsai, o módulo de Young longitudinal do compósito será de aproximadamente 31,3 GPa.

4. Análise macromecânica

A análise macromecânica consiste na predição do comportamento de um laminado sob tensões cisalhantes, flexionais e axiais. Os laminados consistem no empilhamento de diversas lâminas de material compósito de forma que as propriedades resultantes deste empilhamento garantam os requisitos desejados em projeto (Figura 12). Cada uma das lâminas pode ser identificada pela sua posição no laminado, pelo material em que é feito e pelo ângulo de orientação em relação a um eixo de referência [2].

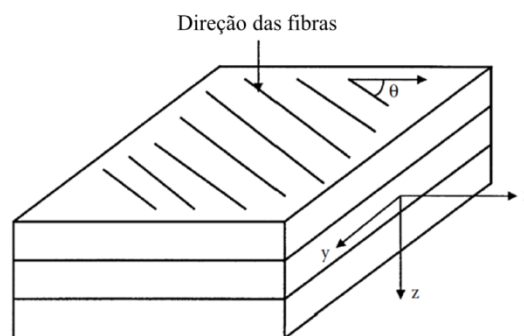


Figura 12 - Esquema de um laminado [10].

Considerando que a espessura das lâminas é pequena em relação às outras dimensões e que não há tensões aplicadas fora do plano, pode-se dizer que $\sigma_z = 0$, $\tau_{zx} = 0$ e $\tau_{zy} = 0$. Estas proposições reduzem as correlações tridimensionais para um caso bidimensional [10].

Para a determinação das correlações entre tensão e deformação de laminados em um estado de tensões, faz-se normalmente as seguintes considerações: cada lâmina é ortotrópica e homogênea; não há cisalhamento com relação à direção z; cada lâmina permanece apenas no regime elástico e não há deslizamento entre as lâminas. A origem do sistema de coordenadas imposto será na metade da espessura, tal que neste local $z=0$ (Figura 13):

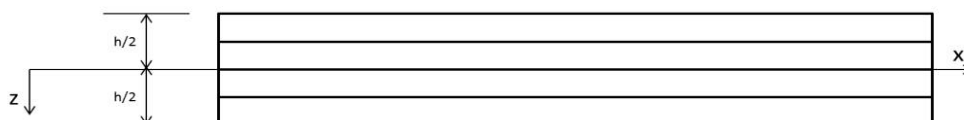


Figura 13 – Laminado formado por quatro lâminas de igual espessura [10].

Considera-se que u_0 , v_0 e w_0 são os deslocamentos do plano de referência a partir da origem do sistema cartesiano nas direções x, y e z, respectivamente. Assim como u, v e w, os deslocamentos de qualquer ponto das direções x, y e z, respectivamente.

De acordo com a Figura 14, pode-se visualizar que:

$$u = u_0 - z\alpha, \quad \text{tal que} \quad \alpha = \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (13)$$

E analogamente:

$$v = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (14)$$

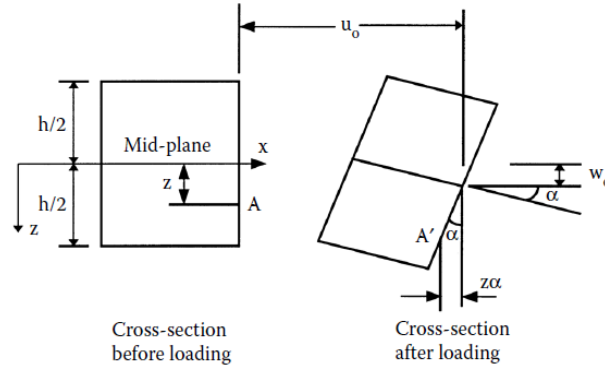


Figura 14 - Relação entre deformações em um laminado [10].

Através da definição de deformações, tem-se que:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad e \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (15)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (16)$$

De onde pode-se chegar a:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (17)$$

onde: κ_x , κ_y e κ_{xy} são as curvaturas do plano de referência.

A matriz tensão e a matriz deformação podem ser correlacionadas pela seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Deve-se ressaltar que a matriz rigidez reduzida descrita na Equação 18 não possui os mesmos componentes que a matriz rigidez para o caso tridimensional [10].

Substituindo a Equação 17 na Equação 18, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Para avaliar o estado de tensão e deformação de cada lâmina, pode-se integrar a tensão e o momento ao longo da espessura do laminado a fim de fornecer as forças e os momentos resultantes (ver Figura 15).

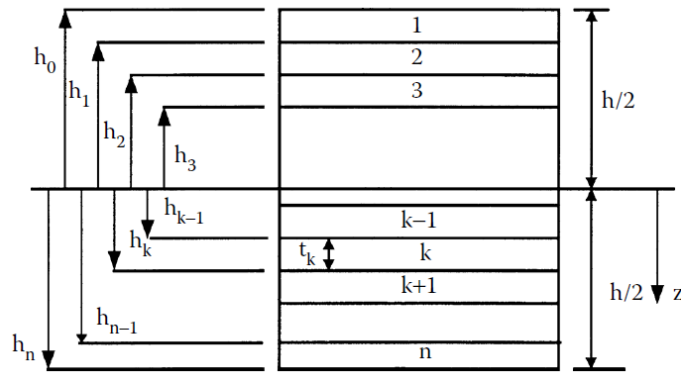


Figura 15 - Laminado formado por n lâminas [10].

Fazendo a integração das tensões globais em todas as lâminas ao longo da espessura, será obtida a força resultante por unidade de comprimento no plano x-y:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (20)$$

De modo análogo, integrando as tensões aplicadas em cada lâmina com relação ao comprimento obtêm-se os momentos por unidade de comprimento no plano x-y ao longo da espessura do laminado:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k z dz \quad (21)$$

Substituindo a Equação 19 nas Equações 20 e 21 e considerando que a matriz rigidez reduzida seja constante para cada lâmina, tem-se que as forças e os momentos resultantes serão expressos por:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \left\{ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right\} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \left\{ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right\} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \left\{ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right\} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \left\{ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right\} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Sabendo que:

$$\int_{h_{k-1}}^{h_k} dz = (h_k - h_{k-1}), \quad \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz = \frac{1}{2}(h_k^2 - h_{k-1}^2), \quad \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz = \frac{1}{3}(h_k^3 - h_{k-1}^3)$$

Pode-se definir as seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Tal que:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k - h_{k-1}) \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (26)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (27)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (28)$$

A partir do exposto, pode-se definir a relação entre tensão e deformação como sendo:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \bar{\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ B^* & D^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ B^* & D^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}^{-1} \quad (29)$$

Abaixo estão descritas equações que correlacionam os módulos elásticos dos laminados com a espessura e propriedades de suas lâminas. Estão descritos os módulos de Young obtidos a partir de ensaios de vibração na longitudinal e na flexão [10].

- Módulo de Young obtido em um ensaio longitudinal:

Considerando a aplicação de uma força na direção x ($N_x \neq 0, N_y = 0$ e $N_{xy} = 0$), pode-se obter o valor da deformação em x através da seguinte relação:

$$\varepsilon_x^0 = A_{11}^* \cdot N_x \quad (30)$$

Lembrando que $N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = \sigma_x \cdot h$, tem-se que:

$$\varepsilon_x^0 = A_{11}^* \cdot \sigma_x \cdot h \quad \rightarrow \quad E_x^{long} = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x^0} = \frac{1}{A_{11}^* \cdot h} \quad (31)$$

De modo análogo, pode-se chegar a:

$$E_y^{long} = \frac{1}{A_{22}^* \cdot h}, \quad G_{xy}^{long} = \frac{1}{A_{66}^* \cdot h}, \quad \nu_{xy}^{long} = -\frac{A_{12}^*}{A_{11}^*}, \quad \nu_{yx}^{long} = -\frac{A_{12}^*}{A_{22}^*} \quad (32)$$

- Módulo de Young obtido em um ensaio na flexão:

Considerando a aplicação de um momento na direção x ($M_x \neq 0, M_y = 0$ e $M_{xy} = 0$), pode-se obter o valor da deformação em x através da seguinte relação:

$$\kappa_x = D_{11}^* \cdot M_x \quad \rightarrow \quad D_{11}^* = \frac{\kappa_x}{M_x} \quad (33)$$

Sabendo que a tensão na direção x é dada por

$$\sigma_{xx} = \frac{M_x \cdot z}{I} = E_x^f \cdot \frac{z}{\rho} \quad \rightarrow \quad E_x^{flex} = \frac{M_x \cdot b \cdot z}{\kappa_x \cdot I \cdot z} = \frac{12 \cdot M_x \cdot b}{\kappa_x \cdot b \cdot h^3} = \frac{12}{D_{11}^* \cdot h^3} \quad (34)$$

De forma análoga, pode-se chegar a:

$$E_y^{flex} = \frac{12}{D_{22}^* \cdot h^3}, \quad G_{xy}^{flex} = \frac{12}{D_{66}^* \cdot h^3}, \quad \nu_{xy}^{flex} = -\frac{D_{12}^*}{D_{11}^*}, \quad \nu_{yx}^{flex} = -\frac{D_{12}^*}{D_{22}^*} \quad (35)$$

- Estudo de caso – Previsão e determinação do módulo de Young de laminados de madeira

A partir do modelo descrito envolvendo a macromecânica e com algumas considerações, é possível prever o módulo de Young de um material laminado a partir das propriedades de suas lâminas. Neste estudo de caso, utilizou-se o equipamento [Sonelastic®](http://www.sonelastic.com) para a medição das lâminas e dos laminados produzidos, de modo a comparar o valor teórico do módulo de Young e o obtido experimentalmente pelo ensaio de vibração flexional e longitudinal.

Foram fabricados dois laminados a partir de placas de madeira divididas em dois grupos: amostras com alto módulo de Young (direção das fibras) e outras com baixo módulo de Young (direção transversal às fibras). Em ambos os laminados foram unidas quatro placas de forma simétrica, tal que as lâminas externas do *Laminado 1* consistiu em placas de maior módulo e as lâminas internas de placas de menor módulo (Figura 16a). O inverso foi feito na montagem do *Laminado 2* (Figura 16b).

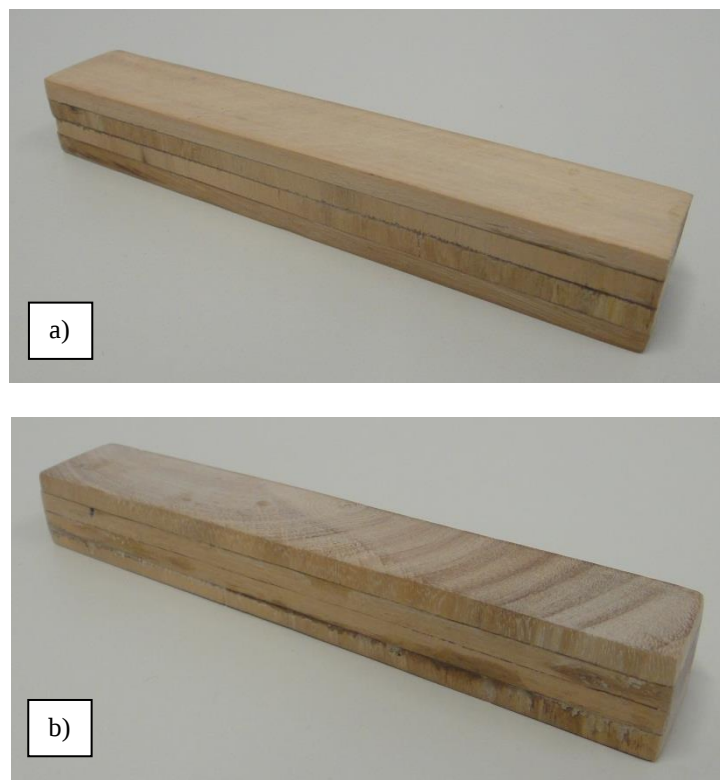


Figura 16 - (a) *Laminado 1* - lâminas externas têm maior módulo de Young e lâminas internas têm menor módulo de Young. (b) *Laminado 2* - lâminas externas têm menor módulo e lâminas internas têm maior módulo.

Primeiramente realizou-se a medição dos dois grupos de lâminas empregando as soluções [Sonelastic®](#) e obteve-se um valor médio (Tabela 6). Para isso, mediu-se a massa e as dimensões em três pontos do corpo de prova. Estes dados alimentaram o software para que, juntamente com a frequência, calcular o módulo de Young do material.

Foi empregado o suporte SB-AP (suporte básico para amostras pequenas) para garantir as melhores condições de medição das lâminas (Figura 17).



Figura 17 – Sistema [Sonelastic®](#) para corpos de prova de pequeno porte utilizado neste estudo para a medição dos laminados. Destaque para o Software e para o Suporte SB-AP.

A Tabela 7 apresenta as espessuras das lâminas avaliadas e a respectiva posição.

Tabela 6 - Módulo de Young médio determinado pelo Sistema [Sonelastic®](#) para os dois grupos de lâminas.

Grupo	Módulo de Young	Incerteza	Incerteza
Lâminas com as fibras na direção longitudinal	15,28 GPa	1,99 GPa	13,0%
Lâminas com as fibras na direção transversal	1,49 GPa	0,09 GPa	6,0%

Tabela 7 – Dimensões das lâminas empregadas na fabricação dos laminados.

		Espessura (mm)
Laminado 1	Lâmina 1	4,6
	Lâmina 2	5,2
	Lâmina 3	5,4
	Lâmina 4	4,9
Laminado 2	Lâmina 1	5,1
	Lâmina 2	4,8
	Lâmina 3	5,1
	Lâmina 4	4,0

- Previsão dos módulos de Young do *Laminado 1*:

Módulo de Young obtido pelo modo de vibração longitudinal:

De acordo com a Equação 26, desprezando o efeito do coeficiente de Poisson das lâminas e considerando que a matriz rigidez reduzida possui os mesmos elementos que a matriz rigidez (o ângulo das fibras com relação à orientação da amostra é 0°), tem-se que:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k - h_{k-1}) = \sum_{k=1}^n [Q_{ij}]_k (h_k - h_{k-1})$$

$$A_{11} = \sum_{k=1}^4 [Q_{11}]_k (h_k - h_{k-1}) = \sum_{k=1}^4 \left[\frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right]_k (h_k - h_{k-1})$$

Considerando $\nu_{21} \rightarrow 0$, pode-se verificar que:

$$A_{11} = \sum_{k=1}^4 [E_1]_k (h_k - h_{k-1})$$

O cálculo do parâmetro A_{11} está descrito na Tabela 8.

Tabela 8 - Cálculo do parâmetro A_{11} para o *Laminado 1*.

		h_{k-1} (m)	h_k (m)	Cálculo ($A_{11} \times 10^3$)	Parâmetro A_{11}
<i>Laminado 1</i>	Lâmina 1	-0,01005	-0,00545	$15,28 \times [-5,45 - (-10,05)]$	0,0703
	Lâmina 2	-0,00545	-0,00025	$1,49 \times [-0,25 - (-5,45)]$	0,0077
	Lâmina 3	-0,00025	0,00515	$1,49 \times [5,15 - (-0,25)]$	0,0080
	Lâmina 4	0,00515	0,01005	$15,28 \times [(10,5 - 5,15)]$	0,0749
				$\Sigma =$	0,1609

Por fim, considerando que não há efeito de acoplamento e utilizando a Equação 31, tem-se que:

$$E_x^{long} = \frac{1}{A_{11}^* \cdot h} \approx \frac{A_{11}}{h} = \frac{0,1609}{20,1 \times 10^{-3}} = 8,00 \text{ GPa}$$

Módulo de Young obtido pelo modo de vibração flexional:

De acordo com a Equação 28, desprezando o efeito da razão de Poisson das lâminas e considerando novamente que a matriz rigidez reduzida possui os mesmos elementos que a matriz rigidez:

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [Q_{ij}]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3)$$

$$D_{11} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^4 [Q_{11}]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^4 \left[\frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3)$$

Considerando novamente que $\nu_{21} \rightarrow 0$:

$$D_{11} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^4 [E_1]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3)$$

O cálculo do parâmetro D_{11} está descrito na Tabela 9.

Tabela 9 - Cálculo do parâmetro D_{11} para o *Laminado 1*.

		h_{k-1} (m)	h_k (m)	Cálculo ($D_{11} \times 10^9$)	Parâmetro D_{11}
<i>Laminado 1</i>	Lâmina 1	-0,01005	-0,00545	$15,28 \times [(-5,45)^3 - (-10,05)^3] / 3$	$4,346 \times 10^{-6}$
	Lâmina 2	-0,00545	-0,00025	$1,49 \times [(-0,25)^3 - (-5,45)^3] / 3$	$8,039 \times 10^{-8}$
	Lâmina 3	-0,00025	0,00515	$1,49 \times [(5,15)^3 - (-0,25)^3] / 3$	$6,785 \times 10^{-8}$
	Lâmina 4	0,00515	0,01005	$15,28 \times [(10,5)^3 - (5,15)^3] / 3$	$4,474 \times 10^{-6}$
				$\Sigma =$	$8,968 \times 10^{-6}$

Por fim, considerando que não há efeito de acoplamento e utilizando a Equação 34, tem-se que,

$$E_x^{flex} = \frac{12}{D_{11}^* \cdot h^3} \approx \frac{12 D_{11}}{h^3} = \frac{12 \times 8,968 \times 10^{-6}}{(20,1 \times 10^{-3})^3} = 13,25 \text{ GPa}$$

- Previsão dos módulos de Young do *Laminado 2*:

Módulo de Young obtido pelo modo de vibração longitudinal:

De acordo com a Equação 26, desprezando o efeito da razão de Poisson das lâminas e considerando que a matriz rigidez reduzida possui os mesmos elementos que a matriz rigidez (o ângulo das fibras com relação à orientação da amostra é 0°):

$$A_{11} = \sum_{k=1}^4 [E_1]_k (h_k - h_{k-1})$$

O cálculo do parâmetro A_{11} está descrito na Tabela 10.

Tabela 10 - Cálculo do parâmetro A_{11} para o *Laminado 2*.

		h_{k-1} (m)	h_k (m)	Cálculo ($A_{11} \times 10^3$)	Parâmetro A_{11}
<i>Laminado 2</i>	Lâmina 1	-0,0095	-0,0044	$1,49 \times [(-4,4) - (-9,5)]$	0,0076
	Lâmina 2	-0,0044	0,0004	$15,28 \times [(0,4) - (-4,4)]$	0,0733
	Lâmina 3	0,0004	0,0055	$15,28 \times [(5,5) - (0,4)]$	0,0779
	Lâmina 4	0,0055	0,0095	$1,49 \times [(9,5) - (5,5)]$	0,0060
$\Sigma =$					0,1648

Por fim, considerando que não há efeito de acoplamento e utilizando a Equação 31, tem-se que:

$$E_x^{long} = \frac{1}{A_{11}^* \cdot h} \approx \frac{A_{11}}{h} = \frac{0,1648}{19 \times 10^{-3}} = 8,67 \text{ GPa}$$

Módulo de Young obtido pelo modo de vibração flexional:

De acordo com a Equação 28 e considerando que a matriz rigidez reduzida possui os mesmos elementos que a matriz rigidez e que $v_{21} \rightarrow 0$:

$$D_{11} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^4 [E_1]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3)$$

O cálculo do parâmetro D_{11} está descrito na Tabela 11.

Tabela 11 - Cálculo do parâmetro D_{11} para o *Laminado 2*.

		h_{k-1} (m)	h_k (m)	Cálculo ($D_{11} \times 10^9$)	Parâmetro D_{11}
<i>Laminado 2</i>	Lâmina 1	-0,0095	-0,0044	$1,49 \times [(-4,4)^3 - (-9,5)^3] / 3$	$3,835 \times 10^{-7}$
	Lâmina 2	-0,0044	0,0004	$15,28 \times [(0,4)^3 - (-4,4)^3] / 3$	$4,342 \times 10^{-7}$
	Lâmina 3	0,0004	0,0055	$15,28 \times [(5,5)^3 - (0,4)^3] / 3$	$8,471 \times 10^{-7}$
	Lâmina 4	0,0055	0,0095	$1,49 \times [(9,5)^3 - (5,5)^3] / 3$	$3,432 \times 10^{-7}$
$\Sigma =$					$2,008 \times 10^{-6}$

Por fim, considerando que não há efeito de acoplamento e utilizando a Equação 34, tem-se que,

$$E_x^{flex} = \frac{12}{D_{11}^* \cdot h^3} \approx \frac{12 D_{11}}{h^3} = \frac{12 \times 2,008 \times 10^{-6}}{(19 \times 10^{-3})^3} = 3,51 \text{ GPa}$$

Os valores previstos pelo modelo macromecânico (descritos acima) e os valores obtidos experimentalmente através da Técnica de Excitação por Impulso ([Sonelastic®](#)), são apresentados na Tabela 12. A determinação foi realizada com o suporte SA-BC (suporte ajustável para barras e cilindros), de modo a proporcionar condições de contorno favoráveis para a excitação dos modos de vibração flexional e longitudinal.

Tabela 12 - Comparação entre os valores previstos pelo modelo teórico e obtidos pelo [Sonelastic®](#).

		Módulo de Young (GPa)		Variação absoluta (GPa)	Variação (%)
		Modelo macromecânico	Sonelastic®		
Laminado 1	E_x^{long}	8,00	10,29	2,29	+22,2%
	E_x^{flex}	13,25	14,38	1,13	+7,8%
Laminado 2	E_x^{long}	3,51	3,60	0,09	+2,5%
	E_x^{flex}	8,67	9,78	1,11	+11,3%

Os modelos teóricos aqui descritos proporcionam uma aproximação razoável com relação aos valores experimentais medidos pela Técnica de Excitação por Impulso. A variação encontrada se dá principalmente devido às aproximações feitas e pela influência da incerteza das medidas de módulo de Young e dimensões que alimentaram o modelo. A Tabela 8 indica que a incerteza inicial da medida de módulo de Young é de aproximadamente 13% para as lâminas com fibras na direção longitudinal e de aproximadamente 6% para as lâminas com fibras na direção transversal.

Anexo B - Coeficiente de Poisson para compósitos empregando a TEI

A medição do coeficiente de Poisson de qualquer material utilizando o equipamento [Sonelastic®](http://www.sonelastic.com) deve levar em consideração a simetria do material. Apesar da norma ASTM E1876 descrever a Técnica de Excitação por Impulso apenas para materiais isotrópicos [1], acreditamos que pode-se estender a sua aplicação para outros tipos de materiais como uma aplicação avançada. Nestes casos, certos cuidados devem ser tomados com relação à orientação dos corpos de prova, como descrito abaixo.

1. Material isotrópico

Apenas duas variáveis independentes são necessárias para caracterizar um material isotrópico quanto às suas propriedades elásticas. Por essa razão, caracterizar apenas um corpo de prova é suficiente para se obter o coeficiente de Poisson deste material. Nesse caso, a matriz flexibilidade possui a seguinte forma:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \quad (36)$$

Aplicando condições de contorno específicas e fazendo algumas considerações [4,19], tem-se que a matriz com suas constantes elásticas possui a seguinte forma:

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \quad (37)$$

Comparando as matrizes, tem-se que:

$$\frac{1}{G} = 2(S_{11} - S_{12}) \quad (38)$$

Sabendo que $S_{11} = \frac{1}{E}$ e $S_{12} = -\frac{\nu}{E}$:

$$\frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \rightarrow G = \frac{E}{2(1+\nu)} \rightarrow \nu = \frac{E}{2G} - 1 \quad (39)$$

O coeficiente de Poisson caracterizado pelos Sistemas [Sonelastic®](http://www.sonelastic.com) é o descrito neste item, visto que é a mais simples e só necessita de um corpo de prova para a sua medição. Neste caso, é necessário empregar o modo de excitação torcional para se obter o módulo de cisalhamento do material.

2. Material transversalmente isotrópico

Cinco constantes independentes são necessárias para caracterizar completamente as propriedades elásticas de um material transversalmente isotrópico. Segue a matriz flexibilidade para este tipo de material:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} \end{bmatrix} \quad (40)$$

Aplicando condições de contorno específicas e fazendo algumas considerações [4,19], tem-se que a matriz com suas constantes elásticas possui a seguinte forma:

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (41)$$

Fazendo uma comparação entre as matrizes, pode-se obter a seguinte relação:

$$\frac{1}{G_{23}} = 2(S_{22} - S_{23}) \quad (42)$$

Sabendo que $S_{22} = \frac{1}{E_2}$ e $S_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2}$:

$$\frac{1}{G_{23}} = 2 \left(\frac{1}{E_2} + \frac{\nu_{23}}{E_2} \right) \rightarrow G_{23} = \frac{E_2}{2(1+\nu_{23})} \rightarrow \nu_{23} = \frac{E_2}{2G_{23}} - 1 \quad (43)$$

A partir da Equação 43, pode-se notar que não é possível obter o coeficiente de Poisson (ν_{23}) somente a partir da Técnica de Excitação por Impulso. Isso ocorre, pois é possível obter os módulos de Young (E_1 e E_2) e o módulo de cisalhamento G_{12} ($=G_{13}$) somente para corpos de prova com essa simetria.

3. Material ortotrópico

Nove constantes são necessárias para caracterizar completamente um material ortotrópico com relação às suas propriedades elásticas. Segue a matriz flexibilidade para materiais ortotrópicos:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad (44)$$

Aplicando condições de contorno específicas e fazendo algumas considerações [4,19], tem-se que a matriz com suas constantes elásticas possui a seguinte forma:

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (45)$$

Considerando a simetria da matriz (Equação 45), obtém-se a seguinte relação:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3} \quad (46)$$

Neste caso, caracterizando três corpos de prova, cada um com uma das direções principais ao longo de seu comprimento, é possível obter os três módulos de Young característicos (E_1 , E_2 e E_3). Com isso, é possível correlacionar a razão destes módulos com as razões dos coeficientes de Poisson do material, mesmo que não seja possível determinar esta propriedade diretamente.

Anexo C - Perguntas frequentes (FAQ)

- Como considerar a orientação das fibras na medição e ao reportar os resultados?

A medição deve ser realizada e os resultados reportados considerando a direção principal das fibras com relação ao corpo de prova. Verifique se o corpo está orientado na direção 1, 2, 3 ou uma combinação de direções (ver capítulo 3 – item 3.3).

- Qual valor de coeficiente de Poisson deve ser utilizado para os cálculos?

Como os compósitos são materiais geralmente ortotrópicos, não é possível obter um resultado para o coeficiente de Poisson por esta técnica (apêndice B). Portanto, é necessário estimar um valor para esta propriedade. Sugere-se utilizar um coeficiente de Poisson de $0,25 \pm 0,25$ a fim de abranger todos os valores possíveis. Vale ressaltar que, de forma geral, a sensibilidade das medidas de módulo de Young com relação ao erro da estimativa do coeficiente de Poisson é baixa.

- Como devo apoiar e excitar o corpo de prova?

As condições de contorno são determinadas em função do modo de vibração do módulo elástico desejado. Se o objetivo for obter o módulo de Young, as condições de contorno que priorizem a vibração flexional ou a longitudinal atendem a necessidade. Porém, se o objetivo for obter o módulo de cisalhamento, deve-se utilizar as condições de contorno que priorizem a vibração no modo torcional (ver capítulo 3 – item 3.2).

- Como é possível calcular os módulos de cisalhamento através dos módulos de cisalhamento efetivos?

A correlação entre essas propriedades não é trivial e dependerá de vários fatores. Cita-se como exemplo uma correlação descrita para amostras cilíndricas de madeira que faz uma associação em paralelo destas propriedades [14].