

Informativo técnico-científico ITC-05 / ATCP

Determinação dos módulos elásticos de madeiras e derivados empregando a Técnica de Excitação por Impulso

ATCP Engenharia Física
Divisão Sonelastic
www.sonelastic.com

Autores:

Eng. Lucas Barcelos Otani (Otani, L.B.)¹

Dr. Antônio Henrique Alves Pereira (Pereira, A.H.A.)¹

Prof. Dr. Pedro Gutemberg de Alcântara Segundinho (Segundinho, P.G.A.)²

Profa. Dra. Elen Aparecida Martines Morales (Morales, E. A. M.)³

(¹) ATCP Engenharia Física

(²) Universidade Federal do Espírito Santo

(³) UNESP

Revisão 1.5
09/2022

ÍNDICE

1. Objetivo.....	1
2. Introdução	1
3. Determinação dos módulos elásticos de madeiras com a Técnica de Excitação por Impulso.....	3
3.1. Fundamentos da técnica.....	3
3.2. Modos de vibração.....	4
3.3. Os módulos elásticos das madeiras.....	6
3.3.1 Módulo de Young.....	7
3.3.2 Módulo de cisalhamento.....	8
3.3.3 Coeficiente de Poisson	8
3.4. Módulos esperados para madeiras leves	9
4. Exemplo – Madeira de eucalipto.....	10
4.1. Materiais e métodos.....	10
4.2. Resultados e discussões	12
5. Considerações finais.....	13
6. Referências.....	14
Apêndice A – Teoria da elasticidade aplicada às madeiras	15

1. Objetivo

O objetivo deste informativo técnico-científico é apresentar a teoria e a metodologia para a determinação não-destrutiva dos módulos elásticos de madeiras e derivados pela Técnica de Excitação por Impulso. Este informativo apresenta uma revisão da literatura e os avanços realizados na aplicação desta técnica, já normatizada para materiais isotrópicos [1], para a caracterização desta classe de materiais.

2. Introdução

A madeira, tanto pela sua disponibilidade quanto pelas suas características, foi um dos primeiros materiais utilizados pelo homem para fins estruturais. Pode ser classificada como um composto sólido, orgânico, formado majoritariamente por celulose, cuja principal função é manter a sustentação das árvores [2]. É um material proveniente de caules que crescem anualmente em diâmetro e comprimento.

Além das aplicações estruturais, a madeira também é útil como matéria-prima para derivados como laminado colado, compensado laminado, placas de partículas e madeira composta com plásticos (*WPC - Wood Plastic Composites*).



Figura 1 - Ponte localizada na floresta de Montmorency sobre o rio Montmorency, Quebec, Canadá. Possui vão de 44 m, altura de 33 m e largura de 4,8 m [3].

Devido às características microestruturais advindas de sua origem natural, as propriedades físicas da madeira dependem da direção de sollicitação [2]. As três principais direções das madeiras estão ilustradas na Fig. 2 e listadas a seguir:

- Longitudinal (*L*): Direção paralela às fibras;
- Radial (*R*): Direção perpendicular aos anéis de crescimento;
- Tangencial (*T*): Direção tangencial aos anéis de crescimento.

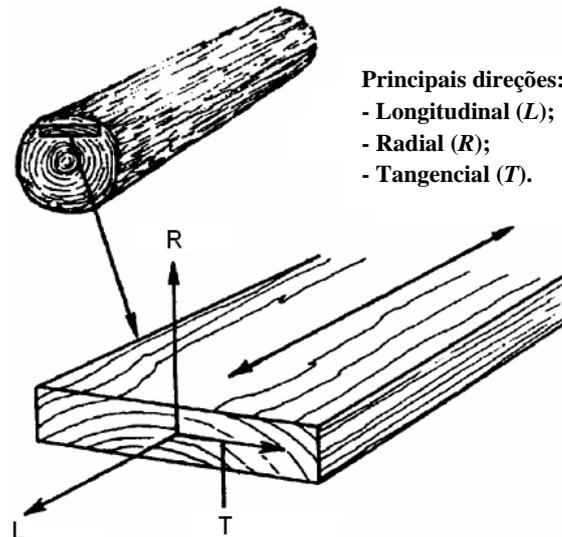


Figura 2 - Principais direções adotadas para madeiras [4].

A madeira é classificada como um material ortotrópico por apresentar planos ortogonais de simetria nos quais as propriedades elásticas são constantes [5]. Esta classificação é uma aproximação, porque dependendo da propriedade avaliada, pode haver variações e gradientes ao longo de uma mesma direção, por exemplo, ao longo da direção radial e dos anéis de crescimento.

A determinação dos módulos elásticos é crucial para o desenvolvimento, a seleção e o controle de qualidade de madeiras e derivados, assim como para simulações e cálculos estruturais. Estas aplicações são possíveis devido à sensibilidade dos módulos elásticos à presença de descontinuidades, defeitos, rachaduras, nós, alterações microestruturais e à composição química [6]. Uma das técnicas não-destrutivas que vem crescendo no setor para a determinação dos módulos é a Técnica de Excitação por Impulso, foco deste informativo.

3. Determinação dos módulos elásticos de madeiras com a Técnica de Excitação por Impulso

3.1. Fundamentos da técnica

A Técnica de Excitação por Impulso determina os módulos elásticos do material a partir das frequências naturais de vibração de um corpo de prova de geometria regular (barra ou cilindro). Estas frequências são excitadas por meio de um impacto mecânico de curta duração, seguido da captação da resposta acústica por um sensor acústico. Um tratamento matemático é aplicado no sinal para a obtenção do espectro de frequências. A partir disso, são calculados os módulos elásticos dinâmicos considerando a geometria, a massa, as dimensões do corpo de prova e as frequências obtidas com o processamento da resposta acústica.

Para a excitação e a detecção dos modos de vibração desejados é necessário impor condições de contorno específicas. Na Fig. 3 é apresentado um exemplo de suporte de corpos de prova de médio porte, com pulsador manual e captador acústico posicionados para excitar e detectar o modo de vibração flexional.

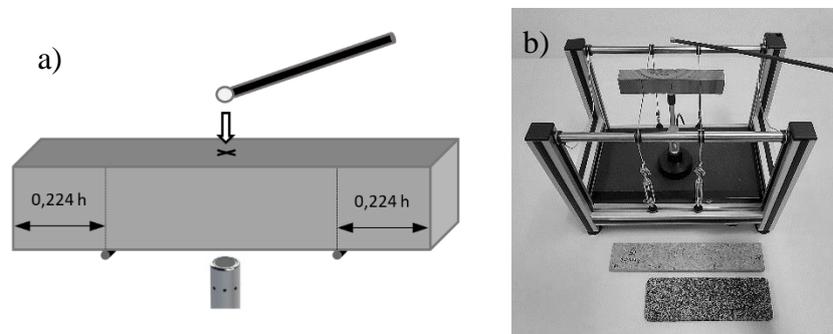


Figura 3 – a) Disposição para a caracterização de uma barra de madeira no modo de vibração flexional pela Técnica de Excitação por Impulso [8]; b) Suporte ajustável para barras e cilindros SA-BC com Captador Acústico CA-DP e pulsador manual desenvolvidos e fabricados pela ATCP Engenharia Física.

O módulo de Young obtido pela Técnica de Excitação por Impulso é dito dinâmico e sempre maior ou igual ao obtido pelo ensaio quase-estático. No entanto, é possível estabelecer uma correlação entre eles [7].

3.2. Modos de vibração

Um corpo de prova pode vibrar em diferentes modos e para cada um desses há uma frequência fundamental. Na Fig. 4 são apresentados alguns dos principais modos fundamentais de vibração [9].

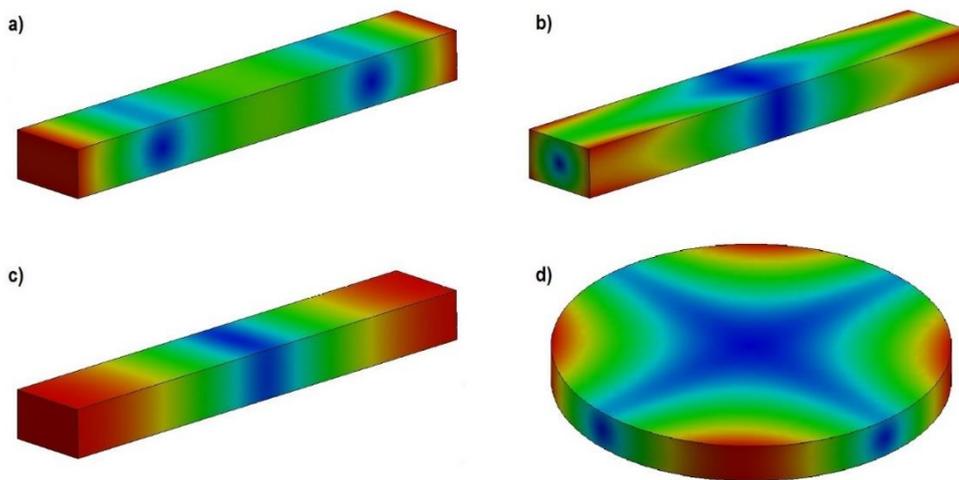


Figura 4 - Modos fundamentais de vibração: a) flexional, b) torcional, c) longitudinal e d) planar. As regiões em azul representam os pontos em que a amplitude de vibração é mínima, enquanto as regiões em vermelho representam as regiões em que a amplitude de vibração é máxima.

O que determina qual modo de vibração será excitado são as condições de contorno impostas ao corpo de prova. A frequência fundamental destes modos é uma função da geometria, da massa, das dimensões e dos módulos elásticos.

Nas Figuras 5 a-c [1,6] são ilustradas as condições de contorno ótimas para os principais modos de vibração de uma barra [1], e na Figura 5 d, de um disco. A partir das frequências de ressonância do corpo de prova em determinados modos de vibração são calculados os módulos elásticos dinâmicos correspondentes.

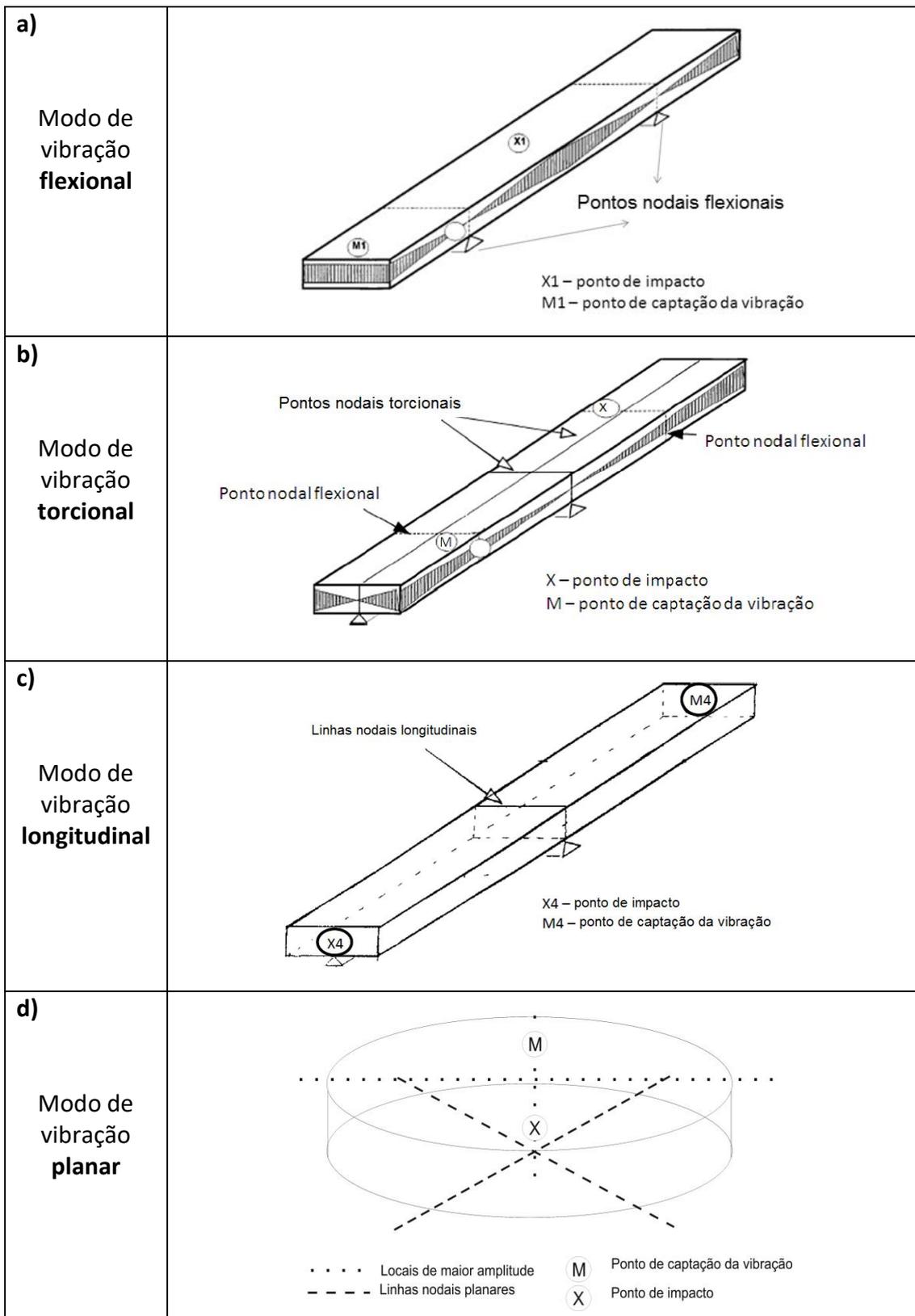
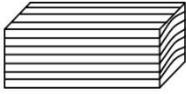
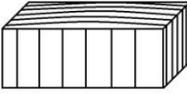
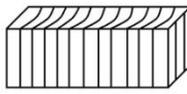


Figura 5 - Condições de contorno impostas ao corpo de prova para a excitação do modo de vibração fundamental (a) flexional, (b) torcional, (c) longitudinal e (d) planar.

3.3. Os módulos elásticos das madeiras

As propriedades elásticas da madeira variam de acordo com a orientação das fibras e dos anéis de crescimento. Quando determinadas com a Técnica de Excitação por Impulso, é importante estar ciente da influência desta orientação para reportar os resultados corretamente. No caso dos derivados de madeira, a análise é análoga.

Tabela 1 - Módulos elásticos determináveis pela Técnica de Excitação por Impulso em função da orientação do corpo de prova e dos modos de vibração.

		Orientação do corpo de prova		
		Longitudinal	Tangencial	Radial
				
Modo de vibração	Flexional	E_L	E_T	E_R
	Torcional	$G_{ef} (G_{LT}, G_{LR})$	$G_{ef} (G_{LT}, G_{RT})$	$G_{ef} (G_{LR}, G_{RT})$
	Longitudinal	E_L	E_T	E_R

A Tabela 1 indica os módulos elásticos de madeiras que podem ser determinados empregando a Técnica de Excitação por Impulso em função da orientação do corpo de prova e do modo de vibração. Nesta tabela, os termos utilizados [5,10] são definidos por:

E_L – Módulo de Young na direção longitudinal;

E_T – Módulo de Young na direção tangencial;

E_R – Módulo de Young na direção radial;

G_{ef} – Módulo de cisalhamento efetivo determinado pelo Sistema Sonelastic[®],

corresponde a uma combinação dos módulos G_{ij} entre parênteses [5];

G_{LT} – Módulo de rigidez associado a deformações de cisalhamento no plano tangencial (LT) resultante do cisalhamento nos planos LR e RT ;

G_{RT} – Módulo de rigidez associado a deformações de cisalhamento no eixo transversal (RT) resultante do cisalhamento nos planos LR e LT ;

G_{LR} – Módulo de rigidez associado a deformações de cisalhamento no plano radial (LR) resultante do cisalhamento nos planos LT e RT .

3.3.1 Módulo de Young

- **Pelo modo de vibração longitudinal**

Quando o corpo de prova for solicitado na direção longitudinal (ver condições de contorno na Fig. 5c), o módulo elástico determinado corresponde ao módulo de Young na direção do comprimento do corpo de prova (E_L). A orientação da extração do corpo de prova é o que determinará o módulo obtido, como apresentado na Tabela 1 (E_L , E_R , E_T ou uma composição destes no caso de amostras cuja direção paralela ao seu comprimento não coincida a uma das orientações principais).

- **Pelo modo de vibração flexional**

Quando um material é flexionado, ocorrem solicitações simultâneas de tração e compressão, como ilustrado na Fig. 6 [11]. Para materiais homogêneos e isotrópicos, o módulo elástico determinado em um ensaio de flexão coincide com o módulo elástico determinado com um ensaio de tração na direção longitudinal. De forma similar, o módulo elástico dinâmico determinado pelo modo de vibração flexional é o mesmo que pelo modo de vibração longitudinal [11]. Entretanto, em flexão, a superfície do corpo de prova é submetida a tensões maiores que o centro. Por essa razão, caso a rigidez do corpo de prova seja diferente na superfície em comparação ao centro (por exemplo, se houver um gradiente de rigidez ao longo da espessura) ou caso a amostra apresente defeitos superficiais como poros, trincas e microtrincas, haverá uma discrepância nos valores determinados pelo modo de vibração flexional e longitudinal [10,12-14].

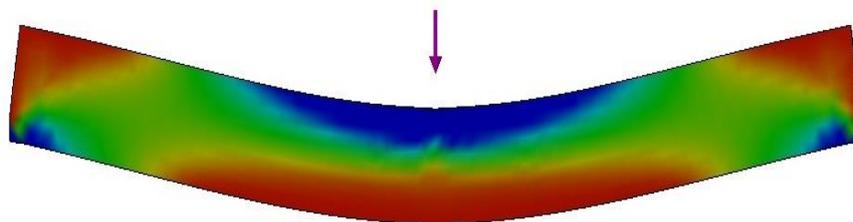


Figura 6 - Região sob tração (vermelho) e sob compressão (azul) durante um ensaio de flexão.

3.3.2 Módulo de cisalhamento

- **Pelo modo de vibração torcional**

Quando um corpo de prova é solicitado em torção, dois módulos de cisalhamento agem simultaneamente no caso de materiais transversalmente isotrópicos e ortotrópicos. Se a torção ocorrer como descrito na Fig. 5b, os módulos de cisalhamento atuantes são os associados aos planos cisalhados (os quatro planos laterais do corpo de prova). Portanto, o módulo de cisalhamento calculado a partir da frequência de vibração torcional fundamental corresponderá a um módulo efetivo. Assim, neste caso, o resultado obtido pelo [Sonelastic®](http://www.sonelastic.com) será uma combinação dos módulos de cisalhamento atuantes (a Tabela 1 indica os módulos de cisalhamento que compõem o valor efetivo para cada orientação de corpo de prova) [5].

3.3.3 Coeficiente de Poisson

A caracterização do coeficiente ou razão de Poisson pela Técnica de Excitação por Impulso não é possível para materiais ortotrópicos como a madeira. Porém, a partir da Teoria da Elasticidade e utilizando a matriz rigidez, é possível obter correlações entre os coeficientes de Poisson e os módulos de elasticidade. A seguir estão descritas estas correlações (a matriz rigidez é discutida no apêndice A).

$$\frac{\nu_{RL}}{\nu_{LR}} = \frac{E_R}{E_L}, \quad \frac{\nu_{TL}}{\nu_{LT}} = \frac{E_T}{E_L}, \quad \frac{\nu_{TR}}{\nu_{RT}} = \frac{E_T}{E_R}$$

Para o cálculo dos módulos elásticos, é necessário estimar um valor para o coeficiente de Poisson. A Tabela 2 apresenta uma sugestão de estimativa e incerteza de acordo com valores médios apresentados pelas madeiras. Vale ressaltar que a sensibilidade do módulo de Young ao erro da estimativa do coeficiente de Poisson é baixa.

Tabela 2 - Coeficiente de Poisson estimado e a respectiva incerteza para o cálculo dos módulos elásticos de madeiras em função da orientação das fibras [5].

Orientação do corpo de prova	Coefficientes de Poisson envolvidos	Coef. de Poisson para madeiras de baixa densidade	Coef. de Poisson para madeiras de alta densidade
Longitudinal	ν_{LT} e ν_{LR}	$0,40 \pm 0,05$	$0,43 \pm 0,07$
Radial	ν_{RT} e ν_{RL}	$0,25 \pm 0,25$	$0,35 \pm 0,30$
Tangencial	ν_{TR} e ν_{TL}	$0,20 \pm 0,15$	$0,18 \pm 0,15$

3.4. Módulos esperados para madeiras leves

As madeiras podem ser classificadas como de baixa, média ou de alta densidade. A maioria das madeiras de alta densidade apresentam valores maiores de módulos elásticos e resistência [2].

Na Tabela 3 são apresentados valores estimados para os módulos elásticos em função dos valores de E_L para madeiras de baixa densidade [5].

Tabela 3 - Módulos elásticos em função de E_L para madeiras de baixa densidade (valores em GPa) [5].

E_L	E_R	E_T	G_{LR}	G_{LT}	G_{RT}
6,0	0,6990	0,3667	0,6564	0,6185	0,0518
7,0	0,7710	0,4069	0,6763	0,6366	0,0566
8,0	0,7856	0,4453	0,6962	0,6546	0,0612
9,0	0,8241	0,4821	0,7161	0,6727	0,0655
10,0	0,8601	0,5177	0,7353	0,6907	0,0696
11,0	0,8940	0,5521	0,7558	0,7088	0,0736
12,0	0,9262	0,5855	0,7756	0,7268	0,0774
13,0	0,9567	0,6180	0,7955	0,7449	0,0811
14,0	0,9860	0,6497	0,8154	0,7629	0,0846
15,0	1,0140	0,6806	0,8352	0,7810	0,0881
16,0	1,0409	0,7109	0,8551	0,7990	0,0914
17,0	1,0668	0,7406	0,8750	0,8170	0,0946
18,0	1,0919	0,7698	0,8948	0,8351	0,0979

O módulo de Young determinado pela Técnica de Excitação por Impulso é dito dinâmico e sempre maior ou igual ao obtido pelo ensaio quase-estático. No entanto, é possível estabelecer uma correlação entre o módulo estático e o dinâmico. Segue abaixo um exemplo de correlação, em MPa, entre o módulo de Young determinado na direção longitudinal através de um ensaio quase-estático (E_{LE}) e o módulo de Young determinado na direção longitudinal de forma dinâmica pela Técnica de Excitação por Impulso (E_{LD}) [7]:

$$E_{LD} = 864,75 + 0,99 E_{LE}, \text{ para amostras de } Eucalyptus \text{ spp}$$

$$E_{LD} = 310,15 + 1,07 E_{LE}, \text{ para amostras de } Pinus \text{ oocarpa}$$

4. Exemplo – Madeira de eucalipto

Neste exemplo é descrita a determinação dos módulos de elasticidade de uma madeira de Eucalipto (*Eucalyptus spp*) em duas orientações empregando a Técnica de Excitação por Impulso e os Sistemas [Sonelastic®](http://www.sonelastic.com).

4.1. Materiais e métodos

A Fig. 7 apresenta a vista superior da secção de um tronco de árvore, sendo os círculos concêntricos correspondentes aos anéis de crescimento. Nesta figura estão ilustrados três possíveis cortes para a obtenção de corpos de prova no formato de barras retangulares. Os corpos de prova indicados por (1) e (2) são os ideais para a obtenção de E_T e E_R , respectivamente. Em (1), a direção do comprimento consiste na direção tangencial aos anéis de crescimento e em (2), a direção do comprimento consiste na direção radial do crescimento da árvore [5].

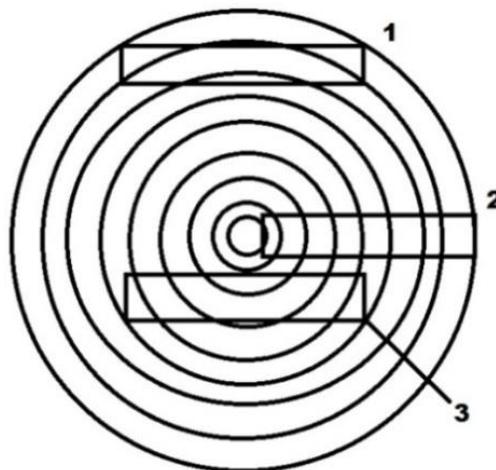


Figura 7 - Melhores locais para extrair os corpos de prova para a determinação os módulos E_T (1) e E_R (2). A extração em (3) combina as direções R e T .

Se o corpo de prova combina as direções R e T com indicado em (3) os valores obtidos serão efetivos e resultado de uma combinação entre E_R e E_T .

As Figuras 8 e 9 mostram a orientação das fibras dos corpos de prova testados. O corpo de prova da Fig. 8 possui fibras orientadas na direção do comprimento, estas barras receberam o índice “ L ”. Já o corpo de prova da Fig. 9 possui suas fibras orientadas na direção transversal e há uma combinação entre as direções radial e tangencial, estas barras receberam o índice “ RT ”.



Figura 8 - Corpo de prova com fibras na direção do comprimento (*L*).



Figura 9 - Corpo de prova com fibras nas direções radial e tangencial (*RT*).

As dimensões nominais dos corpos de prova são 145 mm x 25 mm x 25 mm e foram medidas com um paquímetro; a massa foi medida com uma balança de precisão. Estes parâmetros são necessários para o cálculo dos módulos elásticos.

Os corpos de prova foram ensaiados nos principais modos de vibração (flexional, torcional e longitudinal) utilizando o suporte ajustável para barras e cilindros SA-BC, o atuador eletromagnético ajustável IED, o captador acústico CA-DP e o software Sonelastic® (estes itens compõem o Sistema Sonelastic® para corpos de prova de médio porte e mostrado na Fig. 10).

Para os cálculos, foi considerado o coeficiente de Poisson estimado de $0,25 \pm 0,25$. O coeficiente de Poisson pode variar significativamente dependendo da orientação das fibras no corpo de prova, em função disso foi considerada a incerteza $\pm 0,25$ para compreender todos os valores possíveis para esta propriedade (0,00-0,50). Nota: a influência do coeficiente de Poisson nos cálculos dos módulos elásticos é baixa, o que pode ser verificado pelas incertezas apresentadas nas Tabelas 5 e 6.



Figura 10 - Sistema [Sonelastic®](http://www.sonelastic.com) desenvolvido pela ATCP Engenharia Física para a determinação dos módulos elásticos de corpos de prova de madeira e derivados com a Técnica de Excitação por Impulso.

4.2. Resultados e discussões

Os corpos de prova foram organizados em dois grupos de acordo com a direção das fibras. Nas Tabelas 4 e 5 são mostrados os módulos elásticos determinados em cada modo de vibração.

Tabela 4 - Módulos elásticos dos corpos de prova “RT” determinados em função do modo de vibração.

Corpo de prova	Modo longitudinal	Modo flexional	Modo torcional
	E_{ef} (GPa)	E_{ef} (GPa)	G_{ef} (GPa)
RT – 01	$1,45 \pm 0,05$	$1,50 \pm 0,06$	$1,20 \pm 0,01$
RT – 02	$1,23 \pm 0,04$	$1,30 \pm 0,05$	$1,12 \pm 0,01$
RT – 03	$1,55 \pm 0,05$	$1,67 \pm 0,06$	$1,25 \pm 0,01$
RT – 04	$1,40 \pm 0,05$	$1,45 \pm 0,05$	$1,21 \pm 0,01$
Média	1,41	1,48	1,20
Desvio padrão	0,13	0,15	0,05

Tabela 5 - Módulos elásticos dos corpos de prova *L* determinados em função do modo de vibração.

Corpo de prova	Modo longitudinal	Modo flexional	Modo torcional
	E_L (GPa)	E_L (GPa)	G_{ef} (GPa)
<i>L</i> – 01	$18,01 \pm 0,64$	$13,16 \pm 0,49$	$1,13 \pm 0,01$
<i>L</i> – 02	$22,39 \pm 0,79$	$17,87 \pm 0,66$	$1,34 \pm 0,01$
<i>L</i> – 03	$21,33 \pm 0,76$	$17,23 \pm 0,64$	$1,43 \pm 0,02$
<i>L</i> – 04	$18,19 \pm 0,64$	$14,19 \pm 1,15$	$1,15 \pm 0,01$
Média	19,98	15,61	1,26
Desvio padrão	2,21	2,29	0,15

Os módulos de Young da Tabela 4 são efetivos, pois estes corpos de prova apresentam uma combinação entre as direções *R* e *T* em seu comprimento. Já os módulos dos corpos de prova com índice “*L*” são denominados E_L , uma vez que as fibras estão no sentido do comprimento (Tabela 5).

Nota-se uma diferença entre os módulos medidos pelo modo de vibração longitudinal e pelo flexional, principalmente para as amostras “L”. Esta diferença deve-se à presença de defeitos e descontinuidades superficiais, que influenciam mais pronunciadamente os resultados no modo de vibração flexional; também pode haver um gradiente de rigidez ao longo da espessura, de forma que a superfície seja mais ou menos rígida que o interior, influenciando os resultados. Para as madeiras há uma tendência de que as propriedades obtidas com o modo de vibração longitudinal sejam superiores às obtidas no modo flexional [10,12-14].

Por fim, o G_{ef} consiste em um módulo de cisalhamento efetivo que combina os módulos dos diferentes planos sendo cisalhados durante a vibração. O G_{ef} para as amostras na direção “L” é uma combinação entre G_{LR} e G_{LT} . Para as amostras na direção “RT” essa análise é mais complexa já que a direção principal do corpo de prova não corresponde a uma orientação bem definida (L , R ou T).

5. Considerações finais

A madeira e seus derivados são materiais anisotrópicos e os seus módulos de elasticidade dependem da orientação do corpo de prova e do modo de vibração empregado no ensaio pela Técnica de Excitação por Impulso. Por esta razão, a direção principal das amostras deve sempre ser levada em consideração e reportada nos resultados da propriedade avaliada.

A partir da orientação do corpo de prova e das condições de contorno para os modos de vibração flexional e longitudinal, é possível obter os principais módulos elásticos da madeira: E_L , E_R e E_T . A Técnica de Excitação por Impulso também permite a caracterização de módulos de cisalhamento efetivos por meio do modo de vibração torcional.

6. Referências

- [1] ASTM International. *Standard Test Method for Dynamic Young's Modulus, Shear Modulus, and Poisson's Ratio by Impulse Excitation of Vibration*; ASTM E 1876. 2007. 15 p.
- [2] DİNÇKAL, Ç. Analysis of Elastic Anisotropy of Wood Material for Engineering Applications. *Journal of Innovative Research in Engineering and Science*, Global Research Publishing, pp. 67-80, abr. 2011.
- [3] Ponte de Madeira na floresta de Montmorency. Disponível em:
<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/be/Wood_bridge_Montmorency.jpg>. Acesso em: 31 de Agosto de 2022.
- [4] Adaptado de CALIL JUNIOR, C.; LAHR, F.A.R.; DIAS, A.A. *Dimensionamento de elementos estruturais de madeira*. Barueri: Manole, 2003. 152 p.
- [5] BODIG, J., JAYNE, B. A. *Mechanics of wood and wood composites*. Malabar (EUA), Krieger Publishing Company, 1993.
- [6] COSSOLINO, L.C., PEREIRA, A.H.A. Módulos elásticos: visão geral e métodos de caracterização. Informativo Técnico – ATCP Engenharia Física. Out/2010. Disponível em: <<http://www.atcp.com.br/imagens/produtos/sonelastic/artigos/RT03-ATCP.pdf>>. Acessado em: 18 de Março de 2013.
- [7] SEGUNDINHO, P.G.A., COSSOLINO, L.C., PEREIRA, A.H.A., JUNIOR, C.C. Aplicação do método de ensaio das frequências naturais de vibração para obtenção do módulo de elasticidade de peças estruturais de madeira. *Revista Árvore*, Viçosa-MG, v.36, n.6, p.1155-1161, 2012.
- [8] Esquema de posicionamento e caracterização de acordo com a norma ASTM E1876. Disponível em: <<http://www.atcp.com.br/pt/produtos/caracterizacao-materiais/propriedades-materiais/modulos-elasticos/metodos-caracterizacao-.html>> Acessado em: 04 de Abril de 2013.
- [9] HEYLIGER, P., UGANDER, P., LEDBETTER, H. Anisotropic Elastic Constants: Measurement by Impact Resonance. *Journal of Materials in Civil Engineering*, pp. 356-363, set/out 2001.
- [10] WANGAARD, F.F. *The Mechanical Properties of Wood*. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1950.
- [11] KAW, A.K. *Mechanics of composite materials*. Boca Raton: Taylor & Francis Group, 2 ed, 2006, 457 p.
- [12] ROCHA, J.S., PAULA, E.V.C.M. de, SIQUEIRA, M.L. Flexão Estática em amostras pequenas livres de defeitos. *Acta Amazonica*, Manaus, p. 147-162. 1988.
- [13] CHO, C.L., Comparison of Three Methods for Determining Young's Modulus of Wood. *Taiwan Journal for Science*, pp. 297-306, Maio/2007.
- [14] BUCUR, V., *Acoustics of Wood*. 2ª ed. Germany: Springer, 2006. p. 393.
- [15] WANGAARD, F. F. *The Mechanical Properties of Wood*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1950.
- [16] CALLISTER Jr., W.D. *Materials Science and Engineering*. 7ª ed. New York: John Wiley & Sons, Inc, 2007.
- [17] Curva Tensão-Deformação. Disponível em:
<http://www.ctb.com.pt/?page_id=1471>. Acessado em: 08 de Julho de 2014.
- [18] NYE, J.F. *Physical Properties of Crystals: their representation by tensors and matrices*. Oxford: At the Clarendon Press. 1957.

Apêndice A – Teoria da elasticidade aplicada às madeiras

As madeiras são materiais anisotrópicos e suas propriedades variam de acordo com a orientação da sollicitação. Por esta razão, a teoria da elasticidade aplicável é mais complexa do que a aplicada a materiais isotrópicos. E esse apêndice apresenta como são definidas as propriedades elásticas de madeiras.

- **Introdução: Módulo de Young e Lei de Hooke**

A partir do ensaio de tração de um material isotrópico (um metal recozido, por exemplo), durante o regime elástico é possível correlacionar a tensão e a deformação descrita pela Equação 1 (Lei de Hooke) [16]:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (1)$$

A Figura 15 mostra uma curva típica de um ensaio de tração quase-estático a partir da qual se obtém as principais propriedades mecânicas de um material. O módulo de Young é o coeficiente angular da curva quando o corpo de prova no regime elástico (início da curva).

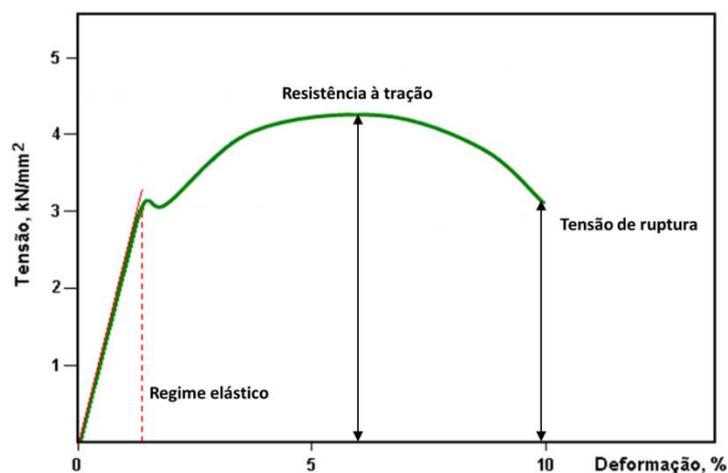
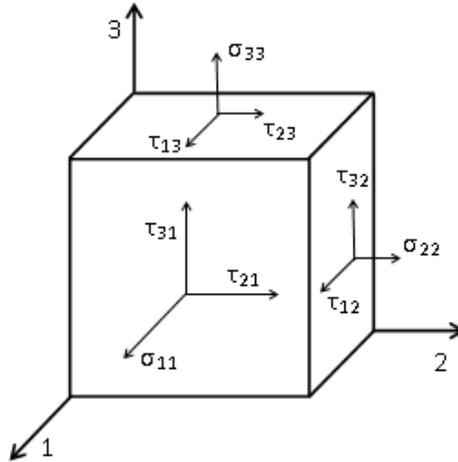


Figura 11 - Curva tensão-deformação de um aço de alta resistência [17].

- **Tensão e deformação – modelo tridimensional**

A ilustração a seguir apresenta um volume infinitesimal com as possíveis tensões que podem surgir durante o carregamento de um corpo.



Nota-se que há dois tipos de solicitações presentes neste modelo: a tensão em tração representada por σ e a tensão em cisalhamento representada por τ . Por conveniência, este modelo pode ser representado por uma matriz 3x3 (Equação 2).

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Assumindo o equilíbrio de forças neste volume, as tensões de cisalhamento direcionadas para a mesma aresta do cubo são iguais (por exemplo, $\tau_{12} = \tau_{21}$). Portanto, o carregamento de um corpo pode ser representado por seis tensões distintas, representadas pela seguinte matriz simétrica:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ & & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Esta análise é semelhante para as deformações:

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ & & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

- **Teoria da elasticidade anisotrópica**

Assim como descrito anteriormente, o comportamento das madeiras depende da direção. Portanto, deve-se sempre levar em consideração a orientação do material para determinar suas propriedades elásticas.

A Lei de Hooke generalizada leva em consideração a matriz tensão e deformação descrita no item anterior. Ela é dada pela seguinte expressão:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}, \quad \text{em que } i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (5)$$

Considerando a tensão e a deformação como matrizes quadradas de ordem 3, pode-se verificar que C_{ijkl} é um tensor de quarta ordem, conhecido como tensor rigidez [11]. A partir de relações de simetria descritas pelas equações a seguir, pode-se reduzir o número de constantes elásticas de 81 para 21.

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}, \quad C_{ijkl} = C_{klij} \quad (6)$$

Uma notação reduzida é aplicada aos índices de forma a simplificar a correlação entre a tensão, a deformação e as constantes elásticas, como mostra a Tabela 6.

Tabela 6 - Abreviação da notação de 4 índices para 2 índices [18].

Notação de 4 índices	11	22	33	23	31	12
Notação de 2 índices	1	2	3	4	5	6

A partir das considerações anteriores, tem-se que a matriz rigidez de um material anisotrópico com comportamento linear elástico é simétrica e pode ser descrita como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Outra forma de se representar a relação entre tensão e deformação de um material é através da matriz de flexibilidade, apresentada na Equação 8.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Ou seja,

$$[S] = [C]^{-1} \quad (9)$$

Para descrever completamente um material quanto às suas propriedades elásticas, é necessário encontrar suas 21 constantes elásticas. Vale ressaltar que este modelo representa as propriedades de um determinado ponto em um material, ou seja, as constantes descritas podem variar de ponto a ponto caso o material não seja homogêneo. A título de simplificação, apesar de serem materiais heterogêneos, as madeiras são comumente consideradas homogêneas.

- **Tipos de materiais e simetrias**

Apesar da variação das propriedades de acordo com a direção de sollicitação, a maioria dos materiais possui alguma organização interna que torna possível a simplificação dos termos das constantes elásticas apresentados no item anterior.

Caso o material não possua nenhum plano de simetria, este é denominado anisotrópico e todas as constantes elásticas serão independentes [5].

Se o material apresenta planos ortogonais simétricos, estes são denominados materiais ortotrópicos. As madeiras são usualmente classificadas desta forma. Para caracterizar um corpo de prova que possui essa simetria são necessárias nove constantes independentes [5].

Se um dos planos de simetria for isotrópico, o material ortotrópico é classificado como transversalmente isotrópico (no caso de madeiras, esta situação ocorreria se as propriedades na direção tangencial fossem iguais às da direção radial).

Por fim, o caso mais simples possível e que possui o menor número de variáveis independentes é quando o material possui isotropia em infinitos planos. Neste caso, o material é denominado isotrópico, ou seja, suas propriedades não variam com a direção. Portanto, a matriz de rigidez será dependente apenas de duas variáveis [5].

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & & & & & \\ & \blacksquare & & & & \\ & & \blacksquare & & & \\ & & & \blacksquare & & \\ & & & & \blacksquare & \\ & & & & & \blacksquare \\ & & & & & & \blacksquare \\ & & & & & & & \blacksquare \\ & & & & & & & & \blacksquare \\ & & & & & & & & & \blacksquare \end{bmatrix} \quad (10)$$

Material anisotrópico

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & & & 0 & 0 & 0 \\ & \blacksquare & & 0 & 0 & 0 \\ & & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ & & & \blacksquare & 0 & 0 \\ & & & & \blacksquare & 0 \\ & & & & & \blacksquare \end{bmatrix} \quad (11)$$

Material ortotrópico

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & & & 0 & 0 & 0 \\ & \blacksquare & & 0 & 0 & 0 \\ & & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ & & & \blacksquare & 0 & 0 \\ & & & & \blacksquare & 0 \\ & & & & & \blacksquare \\ & & & & & & \blacksquare \\ & & & & & & & \blacksquare \\ & & & & & & & & \blacksquare \\ & & & & & & & & & \blacksquare \\ & & & & & & & & & & X \end{bmatrix} \quad (12)$$

Material transver. isotrópico

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & & & 0 & 0 & 0 \\ & \blacksquare & & 0 & 0 & 0 \\ & & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ & & & \blacksquare & 0 & 0 \\ & & & & \blacksquare & 0 \\ & & & & & \blacksquare \\ & & & & & & X \\ & & & & & & & X \\ & & & & & & & & X \\ & & & & & & & & & X \end{bmatrix} \quad (13)$$

Material isotrópico

Legenda:
■ → Independentes
0 → Zero
■ — ■ → Iguais
X → $\frac{1}{2}(C_{11} - C_{22})$

• **Constantes elásticas para madeiras**

De acordo com o item anterior, a madeira é como um material ortotrópico e para sua caracterização são necessárias nove variáveis independentes. Abaixo é apresentada a matriz flexibilidade, descrita conforme suas constantes elásticas. Note que os índices 1, 2 e 3 até então utilizados foram substituídos respectivamente pelos índices utilizados para as madeiras: *L* (longitudinal), *R* (radial) e *T* (tangencial) [5].

• Matriz flexibilidade:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_R \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{RT} \\ \gamma_{LT} \\ \gamma_{LR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{RL}}{E_R} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LR}}{E_L} & \frac{1}{E_R} & -\frac{\nu_{TR}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & -\frac{\nu_{RT}}{E_R} & \frac{1}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{RT}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LR}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_R \\ \sigma_T \\ \tau_{RT} \\ \tau_{LT} \\ \tau_{LR} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Empregando esta matriz é possível determinar as deformações em função das tensões aplicadas desde que conhecidas as constantes elásticas.